كلية العلوم القانونية والاقتصادية والاجتماعية بطنجة
ⵜⴰⵖⵔⵎⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⵜⵉⵣⵔⴼⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⴷⵎⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵏⴰⵎⵓⵙⵉⵏ – ⵟⴰⵏⵊⴰ –
FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES ECONOMIQUES ET SOCIALES -TANGER-

SUPPORT DE COURS

RECHERCHE OPERATIONNELLE

FILIERE : SCIENCES ECONOMIQUES
ET GESTION

SEMESTRE : 6

Pr. BENNANI ANAS

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2024 -2025

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 : PRELIMINAIRE

En 1940, Patrick Blackett est appelé par l'Etat major anglais à diriger la première équipe de la recherche opérationnelle pour résoudre certains problèmes tels que l'implantation optimale de radars de surveillance. L'adjectif « opérationnelle » vient du fait que la première application d'un groupe de travail organisé dans cette discipline avait trait aux opérations militaires.

Après la guerre, les techniques de RO se sont considérablement développées grâce notamment à l'explosion des capacités de calcul des ordinateurs. Les domaines d'application se sont également multipliés.

- **DEFINITIONS**

HILLIER, LIEBERMAN. Il s'agit de l'application par des groupes interdisciplinaires de la méthode scientifique aux problèmes liés au contrôle des organisations ou des systèmes en relation avec l'homme et la machine, afin de produire des solutions optimales pour ces organisations.

THIERAUF et GROSSE. La recherche opérationnelle utilise l'approche planifiée (méthode scientifique) et un groupe interdisciplinaire pour représenter des relations fonctionnelles compliquées sous forme de modèles mathématiques afin de fournir une base quantitative pour la prise de décision et de découvrir de nouveaux problèmes pour l'analyse quantitative.

MASCOWITZ, WRIGHT. La RO est la méthode scientifique appliqué à la résolution de problème et à la prise de décision de gestion en tant que fonction de construction d'un modèle symbolique par l'examen et l'analyse des relations entre eux pour parvenir à une technique de prise de décision basée sur des résultats optimaux.

Avec ces définitions et bien d'autres, nous pouvons conclure que la recherche opérationnelle est la science qui détermine le meilleur plan d'action (optimal) pour un problème de décision sous la contrainte de ressources limitées. Grâce à une approche scientifique de la prise de décision, elle cherche à déterminer la meilleure façon de concevoir et d'exploiter un système, généralement dans des conditions qui requièrent l'allocation des ressources limitées.

- **APPLICATIONS DE LA RO**

Il s'agit d'un échantillon des problèmes que la RO a étudiés au fil du temps et résolus avec succès dans les différents domaines fonctionnels des entreprises et de l'industrie d'aujourd'hui :

Marché et distribution

Développement et introduction de produits, prévision de la demande et activité de la Concurrence, localisation des centres de distribution.

Achats et matériaux

Quantités et sources d'approvisionnement, coûts fixes et variables, remplacement d'équipements.

Finances et Comptabilité

Besoin en Capitaux à long terme, Analyse des flux de trésorerie, Investissements alternatifs.

Planification

Les méthodes PERT-CPM Permettent de contrôler l'avancement de tout projet comportant de multiples activités, tant simultanées que celles qui doivent attendre d'être exécutées.

Fabrication

Planification et contrôle de la production, mélanges de fabrication optimaux, emplacement et taille de l'usine, Circulation des matériaux et contrôle de la qualité.

CHAPITRE 2 : LE MODELE SYMBOLIQUE EN RECHERCHE OPERATIONNELLE

L’objectif principal de la RO est la création ou la représentation des modèles mathématiques qui représentent un problème.

Un modèle est un outil qui nous aide à obtenir une vision bien structurée de la réalité. Ainsi, il fournit un moyen d’analyser le comportement des composants d’un système afin d’en optimiser les performances. Il permet d’analyser cette situation sans interférer avec le fonctionnement réel, puisque le modèle est un miroir de ce qui se passe.

Les modèles mathématiques ou symboliques utilise des équations mathématiques pour décrire le comportement du système.

Un modèle mathématique comprend principalement quatre ensembles d’éléments de base. Ces éléments sont les suivants : Variables de décisions et paramètres, Fonction économique (objectif) et restrictions.

1. Variables de décision :

Il s’agit des inconnus ou des décisions à prendre en résolvant le modèle.

2. Paramètres de décision :

Il s’agit des valeurs connues qui relient les variables aux contraintes ou à la fonction objectif.

3. Fonction objectif :

La fonction objectif ou fonction économique est la mesure de l’efficacité du système exprimée sous la forme d’une fonction mathématique des variables de décision. Le modèle de décision optimal produit la meilleure valeur de la fonction objectif.

Maximiser un avantage : Profit, rendement.

Minimiser un inconvénient : Coût, dépense.

4. Restrictions

Il s’agit des contraintes technologiques, économiques et autres du système qui limitent les variables de décision à une gamme de valeurs réalisable.

CHAPITRE 3 : LA PROGRAMMATION LINEAIRE (PL)

La PL utilise un modèle mathématique pour décrire le problème. Le mot « linéaire » signifie que toutes les fonctions mathématiques du modèle doivent être des fonctions linéaires.

- **Rappel**
- On appelle fonction linéaire toute fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme :

f (x) = a x

où a est une constante, appelé coefficient de linéarité de la fonction linéaire f.

Si une fonction est linéaire, alors sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.

- On appelle fonction affine toute fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme f (x) = a x + b

où a et b sont des constantes.

a : Coefficient de la fonction affine f.

b : Ordonnée à l'origine de la fonction affine f.

Remarques :

- Si b = 0, l'expression devient f (x) = a x. On retrouve alors une fonction linéaire.

Donc : toute fonction linéaire est aussi une fonction affine.

- Si a = 0, l'expression devient : f (x) = b. On obtient alors une fonction constante.

Donc : toute fonction constante est aussi une fonction affine.

- Si a = b = 0, l'expression devient : f (x) = 0. On obtient alors la fonction nulle. Et la fonction nulle est linéaire, constante et donc affine.

La programmation linéaire traite la planification des activités en vue d'obtenir un résultat optimal.

Le PL s'exprime avec une fonction économique qui s'écrit sous la forme suivante :

$$f(x_1, x_2, \dots . x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

$$f(x_1, x_2, \dots . x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i$$

Les coefficients c_i sont des coefficients de la fonction économique.

Les variables x_i s'appellent variables de décision ou variables d'état.

Les contraintes s'expriment sous forme des inéquations.

- Si on cherche à maximiser la fonction objectif, les contraintes s'écrivent sous forme d'inégalité de signe ≤.
- Si on cherche à minimiser la fonction objectif, les contraintes s'écrivent sous forme d'inégalité de signe ≥.

Les variables de décision sont toujours de signe positif, et on les appelle les contraintes de positivité ($x_i \geq 0$)

La forme canonique :

$Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$	$Min\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ . \\ . \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \cdots + a_{jn}x_n \le b_j \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots\ x_n \ge 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ . \\ . \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \cdots + a_{jn}x_n \ge b_j \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots\ x_n \ge 0 \end{cases}$

Exemple de problème de production

Soit le problème de production suivant : Une firme fabrique deux produits P1 et P2 à l'aide des matières premières M1, M2 et M3 en quantité respectives : 8Kg,7Kg et 3Kg. La production d'une unité de P1 nécessite 2 Kg de M1 et 4 Kg de M2. Or la production d'une unité de P2 exige 2Kg de M2 et 1 Kg pour M1 et M3.

Le profit d'une unité de P1 dû à la fabrication est égal à 5 DH et celui d'une unité de P2 est égal à 6 DH.

La mission de la direction est de faire fonctionner cette usine de manière optimale avec un profit maximal en respectant les contraintes sur les matières premières.

On résume les données sous forme de tableau :

	P1	P2	Quantité (Ressource)
M1	2	1	8
M2	4	2	7
M3	0	1	3
Profit	5	6	

x_1 : La quantité du produit P1 à produire

x_2 : La quantité du produit P2 à produire

$x_1\ et\ x_2$ sont dites variables de décision

Fonction Economique : $Max\ Z = 5x_1 + 6x_2$

Les contraintes relatives à M1, M2 et M3 :

$2x_1 + x_2 \le 8$; $4x_1 + 2x_2 \le 7$; $x_2 \le 3$

Les contraintes de positivité :

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

Donc, le modèle du problème de production est le suivant :

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

CHAPITRE 4 : LA RESOLUTION DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE – LA METHODE GRAPHIQUE

Pour résoudre un problème linéaire en utilisant la méthode graphique, nous commençons par tracer les droites à partir de chaque contrainte.

En se basant sur l'exemple précédent :

(M1) $2x_1 + x_2 = 8$

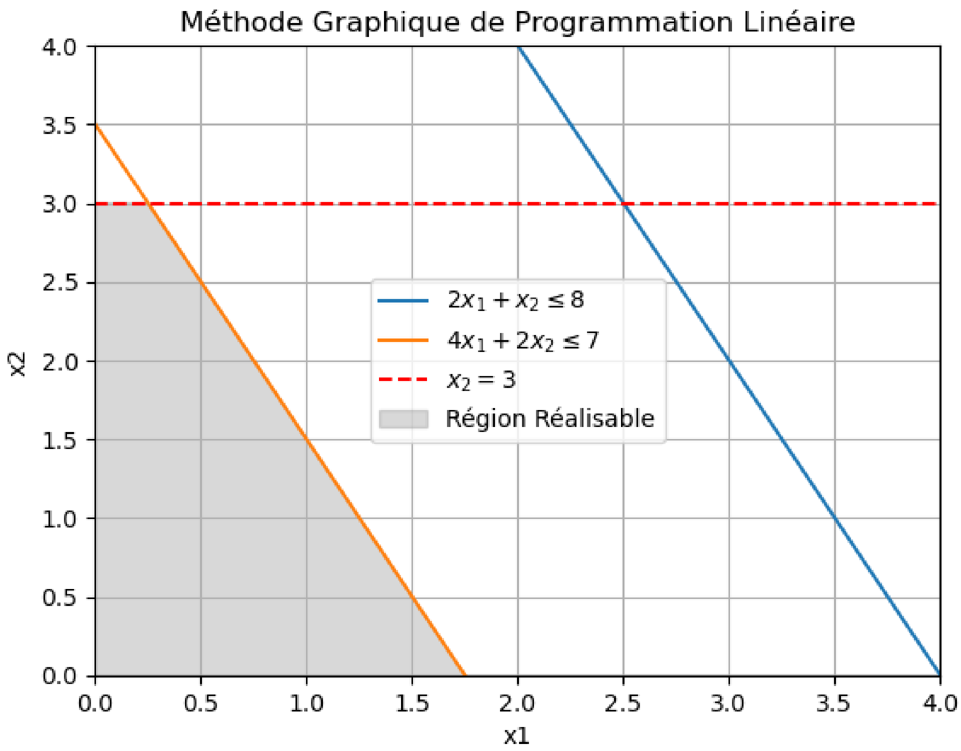
x_1	4	2
x_2	0	4

(M2) $4x_1 + 2x_2 = 7$

x_1	0	$\frac{3}{4}$
x_2	$\frac{7}{2}$	2

(M3) $x_2 = 3$

x_1	0	1
x_2	3	3



N'importe quels points dans cette région réalisable satisfait toutes les contraintes (conditions)

La région réalisable est la région OEFG. Les points OEFG sont définis ci-dessous

Méthode de recensement des sommets :

Comparer les valeurs de l'objectif correspondantes à chacun des points sommets. La plus grande valeur réalise le maximum et la plus petite valeur réalise le minimum. La solution optimale se trouve dans l'un des sommets de la région réalisable.

Donc on doit remplacer les coordonnées de chaque point sommet dans la fonction économique : $Z = 5x_1 + 6x_2$.

E= (M2) Ո (x_2=0) ➔ E $\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$; $Z_E = 5 * \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{35}{4}$= 8.75

F= (M2) Ո (M3) ➔ F$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$; $Z_F = 5 * \left(\frac{1}{4}\right) + 6 * 3 = \frac{5}{4}$ + 18=19.25

G $\binom{0}{3}$; $Z_G = 5 * 0 + 6 * 3$ =18

O $\binom{0}{0}$; $Z_O = 0$

La valeur maximale de Z est 19.25 correspond au point sommet F.

Pour maximiser le profit, on va produire 0.25 unités de produit P1 et 3 unités de produit P2.

Dans cet exemple la solution optimale est $x_1 = 0.25\ et\ x_2 = 3$, Supposons que la quantité ne peut pas être un nombre décimal.

Nous voudrons que les quantités soient cette fois-ci des nombres entiers ($\in \mathbb{N}^2$) pour que la solution du problème ait un sens applicable d'où la notion de :

PLNE : Programmation Linéaire en Nombres Entiers. Ou Integer Programming (IP) ou Integer Linear Programming (ILP)

La différence entre PL et PLNE réside dans la nature des variables des décisions dans ces modèles.

- Dans PL, les variables de décision sont continues ($\in \mathbb{R}$)
- Dans PLNE, les variables de décision sont entières ($\in \mathbb{N}$)

La résolution de PLNE demande des techniques particulières comme l'algorithme Branch and Bound.

Suite au même exercice : on a :

G $\binom{0}{3}$ sont des nombres entiers. $Z_G = 18$.

$F\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\3\end{pmatrix}$; ¼=0.25 est un nombre décimal, donc $F_1\binom{0}{3}$ et $F_2\binom{1}{3}$; F_1=G ; $Z_{F1} = 18$

Les coordonnées de point F_2 ne satisfont pas la contrainte de M2, donc il ne s'agit pas d'une solution.

$E\begin{pmatrix}\frac{7}{4}\\0\end{pmatrix}$; 7/4 =1.75 est un nombre décimal, donc $E_1\binom{1}{0}$ et $E_2\binom{2}{3}$;

Les coordonnées de point E_2 ne satisfont pas la contrainte de M2, donc il ne s'agit pas d'une solution.

$Z_{E1} = 5$

Dans ce cas la valeur maximale de la fonction économique est : 18, donc la solution optimale est $x_1 = 0\ et\ x_2 = 3$

<u>Contraintes saturées et marginales</u>

Contraintes	**Ressources**	**Utilisation**	**Ecart**	**Etat**
$2x_1 + x_2 \leq 8$	8 Kg	2*0+3=3	8-3=5	Marginal
$4x_1 + 2x_2 \leq 7$	7 Kg	4*0+2*3=6	7-6=1	Marginal
$x_2 \leq 3$	3 Kg	3	3-3=0	Saturé

Remarque : Lorsque les contraintes sont de type ≥ (Prob de Minimisation) on parle de surplus des ressources et non pas des écarts.

CHAPITRE 5 : LA RESOLUTION DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE – LA METHODE DU SIMPLEXE

Comment ça se passe ?

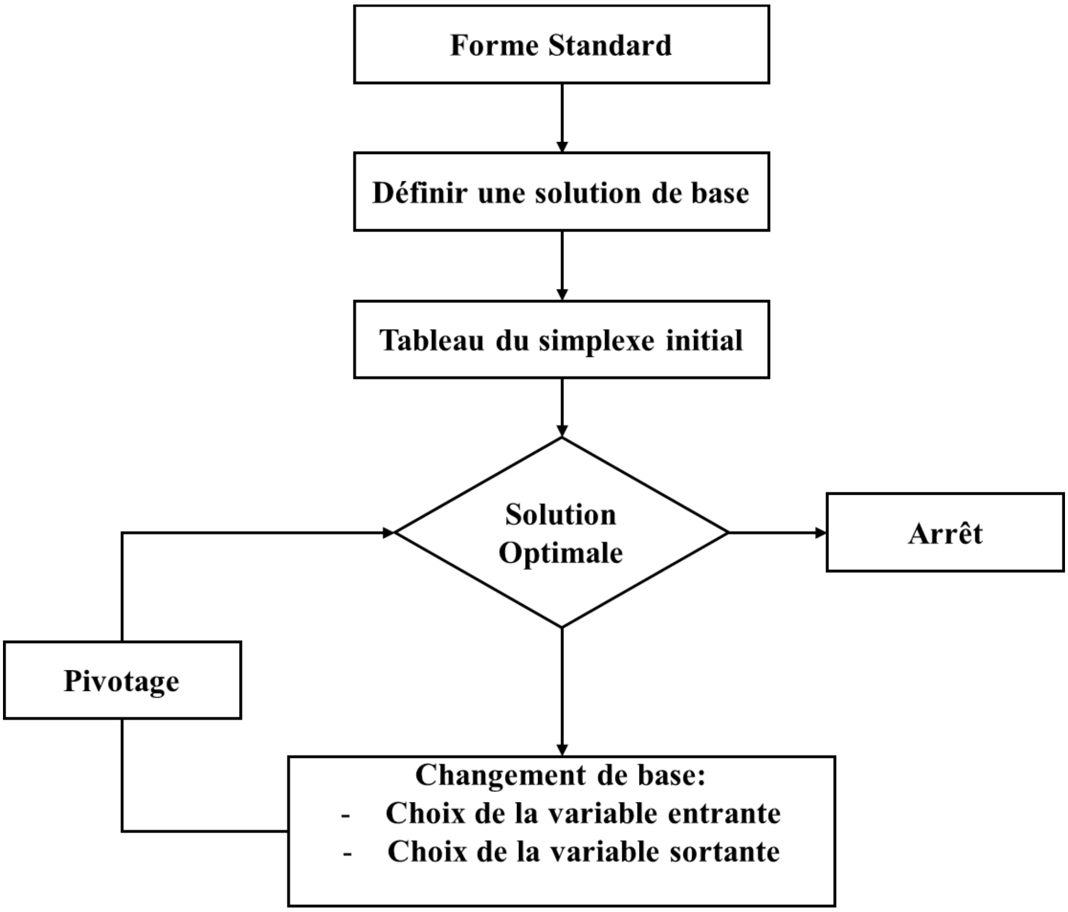


Figure 1:Le processus de la méthode du Simplexe

Nous prenons le même exemple :

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 \qquad\qquad Max\ Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Forme Standard}} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + e_1 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + e_2 = 7 \\ x_2 + e_3 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 \end{cases}$$

On exprime le problème sous forme matricielle : A.X= b

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0 & 0\\4 & 2 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \;;\; X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix} \;;\; b=\begin{bmatrix}8\\7\\3\end{bmatrix} \;;\; C=\begin{bmatrix}5 & 6 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Une fois, nous avons la forme standard de notre PL, nous pouvons tracer le 1er tableau du simplexe (initial).

<u>Règle :</u> On choisit les variables de décision comme étant des variables hors base, et les variables d'écarts (e_i) comme des variables de base. Càd : on suppose que : $x_1 = x_2 = 0$ et on va déduire les variables $e_1,\ e_2\ et\ e_3$

Max	C_i		5	6	0	0	0	Rapport
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
0	e_1	8	2	1	1	0	0	8/1=8
0	e_2	7	4	2	0	1	0	7/2=3.5
0	e_3	3	0	**1**	0	0	1	3/1=3
	$\boldsymbol{Z_i}$	**0**	0	0	0	0	0	
$\boldsymbol{C_i - Z_i \le 0}$	$C_i - Z_i$		5	**6**	0	0	0	

$\boldsymbol{C_i - Z_i \le 0}$: Condition d'arrêt dans le cas de problème de maximisation

<u>Le Choix de la variable entrante</u> : Le coefficient $C_i - Z_i$ dont la valeur est la plus élevée détermine la variable à entrer dans la base. On appelle la colonne de la variable entrante la colonne pivot. Dans ce cas est $: x_2.$

<u>Le Choix de la variable sortante</u> : Pour trouver cette variable, on doit trouver le minimum du rapport du coefficient du membre de droit « b » de chaque contrainte sur le coefficient correspondant de la colonne pivot quand ce dernier est strictement positif. R=$\{8/1|7/2|3/1\}$; min = 3 correspond à la variable e_3. La ligne correspondante à la variable e_3 est la ligne pivot.

L'intersection de la colonne et la ligne de pivot est le pivot. Dans ce cas est : 1

<u>Le Pivotage :</u> Le pivotage est le processus qui consiste à rendre le pivot=1. Le pivot nous permettra de transformer le tableau actuel en un 2ème tableau correspondant à la nouvelle base. Pour cela :

- Transformation de la ligne pivot : Diviser tous ses éléments par le pivot.
- Transformation de la colonne pivot : les éléments situés au-dessous et au-dessus de pivot deviennent égales à Zéro 0.
- Transformation des autres cases de tableau en appliquant la règle dite de rectangle.

Règle de rectangle : $a' = a - \frac{b*c}{Pivot}$

- a' : La nouvelle valeur du coefficient a
- b : l'élément situé sur la même ligne que la valeur a, mais dans la colonne du pivot.
- c : L'élément situé sur la même colonne que la valeur a mais sur la ligne du pivot.

Tableau 2 de notre exemple : (2ème itération)

Max	C_i		5	6	0	0	0	Rapport
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
0	e_1	5	2	0	1	0	-1	5/2
0	e_2	1	**4**	0	0	1	-2	1/4
6	x_2	3	0	1	0	0	1	**
	$\boldsymbol{Z_i}$	**18**	0	6	0	0	6	
$\boldsymbol{C_i - Z_i \leq 0}$	$C_i - Z_i$		**5**	0	0	0	-6	

Tableau 3 de notre exemple : (3ème itération)

Max	C_i		5	6	0	0	0	Rapport
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
0	e_1	9/2	0	0	1	-1/2	0	
5	x_1	**1/4**	1	0	0	1/4	-1/2	
6	x_2	**3**	0	1	0	0	1	
	$\boldsymbol{Z_i}$	**19.25**	5	6	0	5/4	7/2	
$\boldsymbol{C_i - Z_i \leq 0}$	$C_i - Z_i$		**0**	**0**	**0**	**-5/4**	**-7/2**	

Le maximum de la fonction Z est atteint lorsqu'il n'y a plus de coefficient positif dans la dernière ligne. On poursuit les changements de base et les pivotages jusqu'à ce qu'on parvienne.

Donc la solution optimale est $x_1 = \frac{1}{4}$ *et* $x_2 = 3$ *avec Z= 19.25*

CHAPITRE 6 : LA METHODE DU SIMPLEXE – CAS PARTICULIERS

❖ Solutions multiples

On identifie le cas lorsque l'un des coefficients $\boldsymbol{C_i - Z_i}$ relatif à une variable hors base est nul.

$$Max\ Z = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le second membre doit être positif

$$\Longrightarrow$$

$$Max\ Z = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard

$$\Longrightarrow$$

$$Max\ Z = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ x_1 - x_2 + e_2 = 4 \\ x_1 + x_2 + e_3 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Après des itérations au niveau de tableau de simplexe, on obtient :

Max	C_i		1	-1	0	0	0	Rapport
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
0	e_1	12	0	-1	1	2	0	**
1	x_1	**4**	1	-1	0	1	0	**
0	e_3	**6**	0	2	0	-1	1	6/2 = 3
	$\boldsymbol{Z_i}$	**4**	1	-1	0	1	0	
$\boldsymbol{C_i - Z_i \leq 0}$	$C_i - Z_i$		**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	

On remarque que la dernière ligne : $C_i - Z_i$ contient un nombre nul correspondant à une variable hors base qui est x_2 . Donc x_2 peut entrer en base, ce qui conduit à une nouvelle solution de base optimale.

Ce changement n'affecte pas la valeur optimale $Z = 4$.

A travers le nouveau tableau de simplexe ($e_3 : Sortante;\ x_2 : Entrante$), on obtiendra une solution optimale suivante : x_1=7 et $x_2 = 3$.

Tous les points réalisables appartenant au segment : $\left[\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\right]$

❖ Solutions impossible

$Min\ Z = -x_1 + x_2$ $\qquad$ $Min\ Z = -x_1 + x_2$ $\qquad$ $Min\ Z = -x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 \leq -8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + e_1 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - e_2 = 8 \\ x_1 + x_2 + e_3 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si $x_1 = x_2 = 0$ alors $e_1 = 2, e_2 = -8$ et $e_3 = 5$. e_2: ne doit pas être négatif

Donc on va appeler la variable artificielle t (La méthode M)

$Min\ Z = -x_1 + x_2 + Mt$ *tel que M : est nombre très grand*

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + e_1 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - e_2 + \mathrm{t} = 8 \\ x_1 + x_2 + e_3 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dans le cas de minimisation, on prend +Mt dans la fonction objectif.

Si $x_1 = x_2 = 0$ *alors* $e_1 = 2, t = 8$ *et* $e_3 = 5$ *(Variable de base)*

Min	C_i		-1	1	0	0	0	M	Rapport
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	t	
0	e_1	2	-2	1	1	0	0	0	2
M	t	8	-1	2	0	-1	0	1	4
0	e_3	5	1	1	0	0	1	0	5
	$\boldsymbol{Z_i}$	8M	- M	2M	0	-M	0	M	
$\boldsymbol{C_i - Z_i \geq 0}$	$C_i - Z_i$		**-1+M**	**1-2M**	**0**	**M**	**0**	0	

La condition d'arrêt : Tous les coefficients $\mathbf{C_i - Z_i \geq 0}$.

La colonne pivot : le minimum du nombre négatif de $\mathrm{C_i - Z_i}$. (x_2)

Après des calculs, on obtient ce tableau :

Min	C_i		-1	1	0	0	0	M	Rapport
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	t	
1	x_2	4	0	1	1/3	0	2/3	0	
M	t	1	0	0	-1	-1	-1	1	
-1	x_1	1	1	0	-1/3	0	1/3	0	
	$\boldsymbol{Z_i}$	3+M	-1	1	2/3-M	-M	1/3-M	M	
$\boldsymbol{C_i - Z_i \geq 0}$	$C_i - Z_i$		**0**	**0**	**-2/3+M**	**M**	**-1/3+M**	0	

Nous avons tous les coefficients : $\boldsymbol{C_i - Z_i \geq 0}$ **:** condition d'arrêt. La solution est optimale, pourtant la variable artificielle « t » se trouve parmi la solution optimale, par conséquent, le PL n'a pas de solution !! La solution est impossible.

❖ <u>Solutions non bornées</u>

Prenons l'exemple suivant à résoudre par la méthode de simplexe.

$Max\ Z = 10x_1 + 14x_2$ $\qquad$ $Max\ Z = 10x_1 + 14x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 = 12 \\ x_1 - e_2 = 8 \\ x_2 + e_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si $x_1 = x_2 = 0$ alors $e_1 = -12$, $e_2 = -8$ et $e_3 = 6$. e_1 *et* e_2: ne doivent pas être négatives.

Donc on va appeler deux variable artificielles t_1 et t_2 (La méthode M)

$$Max\ Z = 10x_1 + 14x_2 - Mt_1 - Mt_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 + t_1 = 12 \\ x_1 - e_2 + t_2 = 8 \\ x_2 + e_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dans le cas du problème de maximisation, on associe à la fonction objectif le coefficient -M pour les variables artificielles.

Le tableau initial de simplexe est le suivant :

Max	C_i		10	14	0	0	0	-M	-M	Rapport
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	
-M	t_1	12	1	1	-1	0	0	1	0	12
-M	t_2	8	1	0	0	-1	0	0	1	8
0	e_3	6	0	0	0	0	1	0	0	**
	$\boldsymbol{Z_i}$	-20M	-2M	-M	M	M	0	-M	-M	
$\boldsymbol{C_i - Z_i \leq 0}$	$C_i - Z_i$		**10+2M**	**14+M**	**-M**	**-M**	**0**	0	0	

Une fois une variable artificielle sort de la base, on ne s'intéressera pas à calculer les paramètres de sa colonne. (t_2 , x_1)

Le dernier tableau est le suivant :

Max	C_i		10	14	0	0	0	-M	-M	Rapport
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	
14	x_2	6	0	1	0	0	1			
10	x_1	8	1	0	0	-1	0			
0	e_1	2	0	0	1	-1	1			
	$\boldsymbol{Z_i}$	164	10	14	0	-10	14			
$\boldsymbol{C_i - Z_i \leq 0}$	$C_i - Z_i$		0	0	0	10	-14			

Nous avons la colonne de pivot (e_2) comme variable entrante. Dans ce cas on ne peut pas définir la ligne de pivot car nous avons des valeurs nulles ou négatives dans la colonne de pivot. Donc. La solution optimale est infinie (Non bornée), par conséquent, la valeur optimale tend vers l'infini.

CHAPITRE 7 : ANALYSE DE SENSIBILITE

L'analyse de sensibilité est une technique utilisée dans la PL. Pour évaluer comment les changements dans les paramètres du problème (C_i et b_j) affectent la solution optimale. Cette analyse a pour objectif de chercher la possibilité de varier les paramètres du PL sans changer la solution optimale. Autrement dit : est ce que la solution optimale est sensibles aux paramètres.

Prenons notre premier exemple :

$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale est (¼ 3)

❖ **<u>La variation du coefficient C_1 de la fonction économique</u>**

On voudrait changer la variation du coefficient C_1 de la fonction objectif (Intervalle d'optimalité) sans changer la solution optimale.

On va considérer : $C'_1 = C_1 + \Delta = 5 + \Delta$ où Δ : Variation

Nous prenons le dernier tableau optimal du simplexe de notre exemple, et on remplacera C_1 par son équivalent.

Max	C_i		$5 + \Delta$	6	0	0	0
C_{Base}	V_{Base}	b	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
0	e_1	9/2	0	0	1	-1/2	0
$5 + \Delta$	x_1	**1/4**	1	0	0	14	-1/2
6	x_2	**3**	0	1	0	0	1
	$\boldsymbol{Z_i}$	**19.25**+ $\Delta/4$	$5 + \Delta$	6	0	$(5 + \Delta)$ /4	$(7 - \Delta)/2$
$\boldsymbol{C_i - Z_i \leq 0}$	$C_i - Z_i$		**0**	**0**	**0**	$-(5 + \Delta)$ /4	-$(7 - \Delta)/2$

Conditions :

$-(5 + \Delta)$ /4 < 0 et -$(7 - \Delta)/2$ <0 donc : -5< Δ <7 ➔ $0 < C_1 < 12$

Le coefficient de C_1 peut varier entre]0, 12[en gardant la même solution optimale (¼ 3).

❖ **Analyse de sensibilité pour b_j**

La variable d'écart e_1 correspond à la 1ère contrainte (b_1)

La variable d'écart e_2 correspond à la 2ème contrainte (b_2)

La variable d'écart e_3 correspond à la 3ème contrainte (b_3)

Prenons l'exemple du paramètre de b_2

Donc : $b'_j = b_j + \Delta e_2$

Max	C_i		5	6	0	0	0
C_{Base}	V_{Base}	$b'_j = b_j + \Delta e_2$	x_1	x_2	e_1	$\boldsymbol{e_2}$	e_3
0	e_1	9/2 - $\Delta/2$	0	0	1	-1/2	0
5	x_1	1/4+ $\Delta/4$	1	0	0	1/4	-1/2
6	x_2	**3**	0	1	0	0	1
	$\boldsymbol{Z_i}$	19.25 +5. $\Delta/4$	5	6	0	5/4	7/2
$\boldsymbol{C_i - Z_i \leq 0}$	$C_i - Z_i$		**0**	**0**	**0**	**-5/4**	**-7/2**

Les ressources (b_j) doivent être positives. Donc

$\begin{cases} \frac{9}{2} - \frac{\Delta}{2} \geq 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{\Delta}{4} \geq 0 \end{cases}$ Donc $-1 \leq \Delta \leq 9$ ➔ $\boldsymbol{6 \leq b'_2 \leq 16}$

- $Z_i = 19.25 + 5.\Delta/4$ Donc $19.25 - \frac{5}{4} \leq 19.25 + 5.\frac{\Delta}{4} \leq 19.25 + \frac{45}{4}$

$$\boldsymbol{18 \leq Z_i \leq 30.5}$$

CHAPITRE 8 : LA DUALITE

A chaque problème d'optimisation linéaire, nous allons définir un nouveau problème appelé le dual. Le problème original est appelé primal.

Exemple : Nous avons deux catégories : les vendeurs et acheteurs :

- Les vendeurs doivent vendre aux acheteurs et ils veulent maximiser leurs profits.
- Les acheteurs veulent les acheter en coût minimum possible.

Le principe de la dualité représente le plus bas prix total à payer pour l'acheteur doit être égal au bénéfice maximal pour le producteur.

Les propriétés liant le programme primal et son dual, permettront de résoudre des problèmes de minimisation en termes de maximisation, ce qui est souvent plus facile.

<u>Les règles générales de la transformation du PL primal vers dual et vice versa.</u>

Max	**Min**
Nombre de contraintes	Nombre de variables de décision
Contraintes	**Variables de décision**
=	$\in \mathbb{R}$
$\geq$	$\leq$
$\leq$	$\geq$
Variables de décision	**Contraintes**
$\in \mathbb{R}$	=
≥ 0	$\geq$
≤ 0	$\leq$

Exemple : Trouvez le dual de ce PL

Les ressources du primal deviennent les coefficients de la fonction objectif du dual.

Les coefficients de la fonction objectif du primal deviennent les ressources du dual.

❖ **Revenons à notre fameux exemple.**

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 \qquad\qquad Min\ Z' = 8y_1 + 7y_2 + 3y_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Son dual}} \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ y_1 + 2\,y_2 + y_3 \geq 6 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Trouvez la solution du PL Dual à partir du Primal</u>

- <u>La 1ère étape : Etude de l'état des contraintes du primal</u>

  La solution optimale de dual est : (1/4 3)

  - On sait que la 1ère contrainte du Primal n'est pas saturée, donc la variable de décision du dual associée est nulle ($y_1 = 0$).
  - Les deux autres contraintes du primal sont saturées. Rien à signaler.

- <u>La 2ème étape : Etude de signe de la solution optimale du primal</u>
  - On a x_1 =1/4 ≥ 0 alors la 1ère contrainte du dual est saturée.
  - On a x_2 =3 ≥ 0 alors la 2ème contrainte du dual est saturée.

Donc, on obtient le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 = 8 \\ y_1 + 2\,y_2 + y_3 = 6 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

La solution optimale du dual est : $y_1 = 0, y_2 = \frac{5}{4}, y_3 = \frac{7}{2}$

$$\boldsymbol{Z'de\ (dual) = 8y_1 + 7y_2 + 3y_3 = \frac{77}{4} = 19.25 = Z\ de\ (Primal)}$$

Un autre exemple :

$$Max\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 2\,x_3 \qquad\qquad Min\ Z' = 3y_1 + 2y_2 + 2\,y_3 + y_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 3 \\ 2x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Son dual}} \begin{cases} 2y_1 + 3y_3 \geq 4 \\ 4y_1 + y_3 + y_4 \leq 5 \\ 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 2 \\ y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \leq 0\ ,\ y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{cases}$$