Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales

-Tanger-

Mathématiques financières

1ère Année du Cycle licence

Tronc Commun Gestion
Semestre 2 / Groupes:

- CFF GC-MRH GB
- MRH GA

Animé par:

Prof: **BENCHEIKH**

Objectifs :

Ce cours vise à présenter les différents éléments du calcul financier et d'expliquer la notion de la valeur temporelle de l'argent. Il fait apparaître principalement cinq préoccupations :

- **La différence entre les différents types d'intérêts (intérêt simple, intérêt composé).**
- **La différence entre les situations d'actualisation et de capitalisation.**
- **La méthode de calcul de la valeur future et la valeur présente d'une somme ou d'une suite d'annuités.**
- **Les grands domaines d'application du calcul financier.**
- **Les tableaux d'amortissement des emprunts.**

PLAN

Introduction

Les <u>mathématiques financières</u> sont une branche des mathématiques appliquées ayant pour but la modélisation, la quantification et la compréhension des phénomènes régissant les opérations financières d'une certaine durée (emprunts et placements / investissements) et notamment les marchés financiers. Elles font jouer le facteur temps et utilisent principalement des outils issus de l'actualisation, de la théorie des probabilités, du calcul stochastique, des statistiques et du calcul différentiel.

Notion d'intérêt

L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt d'argent.
C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps.
Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt:

- la somme prêtée notée C_0,
- la durée du prêt notée n,
- et le taux auquel cette somme est prêtée notée t ou i.

Il y a deux types d'intérêt: l'**intérêt simple** et l'**intérêt composé**.

Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales

-Tanger-

Partie 1. Les opérations financières à court terme

1ère Année du Cycle licence

Tronc Commun Gestion
Semestre 2 / Groupes:

- CFF GC-MRH GB
- MRH GA

Animé par:

Prof: **BENCHEIKH**

Chapitre 1: Les intérêts simples

1- Principe et champ d'application

- ***L'intérêt simple*** se calcule toujours sur le principal. Il ne s'ajoute pas au capital pour porter lui même intérêt.
- ***L'intérêt simple*** est proportionnel au capital prêté ou emprunté. Il est d'autant plus élevé que le montant prêté ou emprunté est important et que l'argent est prêté ou emprunté pour longtemps.
- ***L'intérêt simple*** est versé en une seule fois au début de l'opération, c'est-à-dire lors de la remise du prêt, ou à la fin de l'opération c'est à dire lors du remboursement.
- ***L'intérêt simple*** concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an)..

2-Calcul pratique

Si nous désignons par:

C: le montant du capital prêté ou emprunté en dirham(valeur nominale)

t : le taux d'intérêt annuel (en pourcentage)

n : la durée de placement (en années)

I : le montant de l'intérêt à calculer en dirham

$$I = C \times t \times n$$

Chapitre 1: Les intérêts simples

2-Calcul pratique

Remarque:

Dans la pratique et pour des raisons de simplification, l'intérêt est calculé en fonction du nombre de jours de placement. L'année est prise pour 360 jours (l'année commerciale), toutefois les mois sont comptés pour leur nombre de jours exacts.

La formule devient:

Si la durée est en jours : $I = \frac{C * t * n}{360}$

Si la durée est en mois: $I = \frac{C * t * n}{12}$

Si la durée est en années: $I = C \times t \times n$

Exemple :

A. Calculer l'intérêt fourni par le placement de 28 000 Dh, à 9%, du 13 septembre d'une année au 27 février de l'année suivante.

B. Un capital de 7 200Dh, prêté à 8% le 8 juin, a acquis, à la fin du prêt, une valeur de 7 288Dh.

2-Calcul pratique

Résolution :

A. Nombre de jours du 13 septembre au 27 février:

Septembre:	30-13=17
Octobre :	31
Novembre :	30
Décembre :	31
Janvier :	31
Février :	27
	167

Intérêt : $\frac{28\,000 * 0.9 * 167}{360} = \boxed{1\,169 \text{ Dh}}$

B. Intérêt produit: 7 288- 7 200= 88

Durée du prêt: $\frac{360 * 88}{7\,200 * 0.8} = 55$ **jours**

Date de remboursement: 55 jours après le 8 juin

soit le $\boxed{\text{2 août}}$

3-La valeur acquise

La valeur acquise Cn du capital Co est la somme de ce capital et des intérêts gagnés I après n périodes de placement.

Si on désigne par Cn la valeur acquise alors:

$$\boxed{C_n = C_o + I}$$

Exemple :

Une somme de 10000 dirhams est placée sur un compte du 23 Avril au 9 Août au taux simple de 7 %.

1. Calculer le montant de l'intérêt produit à l'échéance.

2. Calculer la valeur acquise par ce capital.

3. Chercher la date de remboursement pour un intérêt produit égal à 315 dirhams.

3-La valeur acquise

Résolution :

1. On a: $I = \frac{C * t * n}{360}$ C= 10 000, t = 7%, Calculons alors le nombre de jours de placement.

Avril : 7
Mai : 31
Juin : 30
Juillet : 31
Août : 9

$\left.\right\}$ 108 jours ⇒ Intérêt : $I = \frac{10\,000 * 0.07 * 108}{360} = 210$ dirhams

2. La valeur acquise par ce capital est égale à Cn,

Cn = Co + I = 10000 + 210 = 10210 dirhams

3. Date de remboursement correspondant à un intérêt de 315 dirhams

$$I = \frac{Co * t * n}{360} \quad \text{donc} \quad n = \frac{360 * I}{Co * t} \Rightarrow n = \frac{360 * 315}{10\,000 * 0.07} = 162 \text{ jours}$$

Date de remboursement:

Avril: 7j , Mai: 31j, Juin: 30j, Juillet : 31j, Août : 31j , septembre: 30j

160 jours

Octobre : 2 jours

162 jours

⇒ **Date de remboursement: 2 octobre**

Chapitre 1: Les intérêts simples

4-Représentations graphique

4.1- Intérêt simple

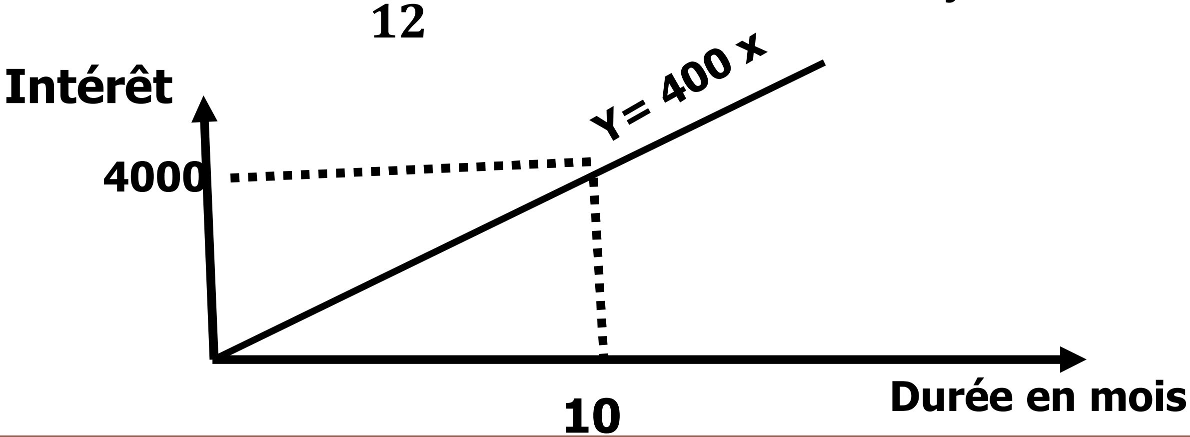
- La représentation graphique de la fonction qui donne l'intérêt en fonction du temps est une droite passant par l'origine. La fonction est croissante.
- L'intérêt est une fonction linéaire du temps.

Exemple :

Une représentation graphique de la variation, en fonction de la durée positive de placement n exprimée en mois, de l'intérêt produit par le placement d'un capital de 60 000 Dh, à 8%.

On écrira:

Intérêt $$I = \frac{60\,000 * 0.08 * n}{12} = 400\,n$$ **donc** $y = 400*x$



4-Représentations graphique

4.2- Valeur acquise

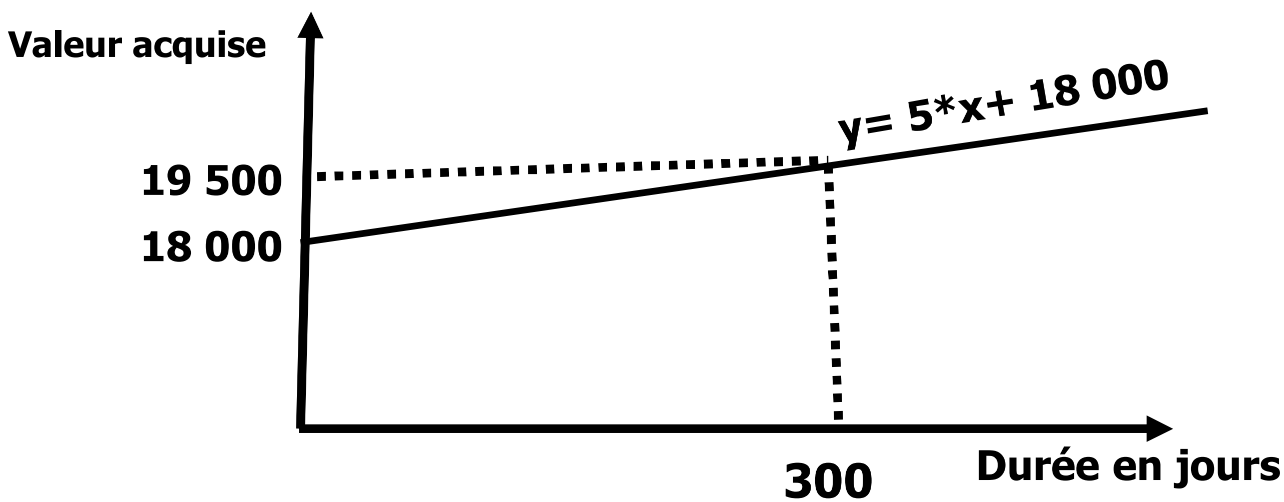
- La représentation graphique de la fonction qui donne la valeur acquise en fonction du temps est une droite ne passant pas par l'origine. La fonction est croissante.
- La valeur acquise est une fonction affine du temps.

Exemple :

Une représentation graphique de la variation, en fonction de la durée de placement n exprimée en jours, de la valeur acquise par un capital de 18 000 Dh, placé à 10%.

On peut écrire:

Valeur acquise $Cn = 18\,000 + \dfrac{18\,000 * 0.1 * n}{360} = 5\,n + 18\,000$ **donc** $y = 5*x + 18\,000$



Chapitre 1: Les intérêts simples

5-Taux proportionnels et taux moyens de placement

5.1- Taux proportionnels

Définition:

Deux taux sont proportionnels si leurs rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitalisation. D'où les résultats suivants: les taux proportionnels au taux annuel ta sont respectivement:

ta/ 360 → taux quotidien tj
ta/ 12 → taux mensuel tm
ta/ 4 → taux trimestriel tt
ta/ 2 → taux semestriel ts

Remarque:

On en déduit que pour une même durée de placement à intérêt simple, deux taux proportionnels correspondent à une même valeur acquise.

5-Taux proportionnels et taux moyens de placement

5.1- Taux proportionnels

Exemple:

Soit un taux annuel de 8%. le taux trimestriel proportionnel correspondant est:

0.08/4= 0.02

Calcul de l'intérêt en dirham rapporté par un capital de 10 000 Dhs placé pendant 3 trimestres:

Au taux annuel de 0.08: $10\,000 * \frac{3}{4} * 0.08 = 600 \text{ dhs}$

Au taux trimestriel de 0.02: $10\,000 * 3 * 0.02 = 600 \text{ dhs}$

5-Taux proportionnels et taux moyens de placement

5.2- Taux moyen de placement

Définition:

Nous appellerons taux moyens de l'ensemble de placements le taux unique T qui, appliqué aux capitaux placés et pour leurs durées respectives, conduirait au même intérêt total.

$$T = \frac{\sum Ci\ ti\ ni}{\sum Ci\ ni}$$

Exemple:

Calculer le taux moyen résultant des placement suivants:

Capitaux	Taux	Périodes
3 800	7.5%	25 mai au 15 juillet
6 420	8.2%	25 mai au 31 juillet
780	8.5%	25 mai au 31 août

5-Taux proportionnels et taux moyens de placement

5.2- Taux moyen de placement

Résolution :

Durée respective des placements: 51, 67, 98 jours.

Intérêt I produit par ces placement:

$$I = \frac{3800 * 0.075 * 51}{360} + \frac{6420 * 0.082 * 67}{360} + \frac{780 * 0.085 * 98}{360} = 156.4$$

Taux de moyen de placement:

$$\frac{3800 * t * 51}{360} + \frac{6420 * t * 67}{360} + \frac{780 * t * 98}{360} = 156.4$$

$$\frac{700380 * t}{360} = 156.4 \Rightarrow 1945.5 * t = 156.4 \Rightarrow \boxed{t = 0.084 = 8.4\%}$$

Où

$$T = \frac{\sum Ci\,ti\,ni}{\sum Ci\,ni} = \frac{(3\,800 * 0.075 * 51) + (6\,420 * 0.082 * 67) + (780 * 0.085 * 98)}{(3\,800 * 51) + (6\,420 * 67) + (780 * 98)} = 8.04\%$$

5-Taux proportionnels et taux moyens de placement

5.2- Taux moyen de placement

Résolution :

Durée respective des placements: 51, 67, 98 jours.

Intérêt I produit par ces placement:

$$I = \frac{3800 * 0.075 * 51}{360} + \frac{6420 * 0.082 * 67}{360} + \frac{780 * 0.085 * 98}{360} = 156.4$$

Taux de moyen de placement:

$$\frac{3800 * t * 51}{360} + \frac{6420 * t * 67}{360} + \frac{780 * t * 98}{360} = 156.4$$

$$\frac{700380 * t}{360} = 156.4 \Rightarrow 1945.5 * t = 156.4 \Rightarrow \boxed{t = 0.084 = 8.4\%}$$

Où

$$T = \frac{\sum Ci\,ti\,ni}{\sum Ci\,ni} = \frac{(3\,800 * 0.075 * 51) + (6\,420 * 0.082 * 67) + (780 * 0.085 * 98)}{(3\,800 * 51) + (6\,420 * 67) + (780 * 98)} = 8.04\%$$

Chapitre 2: La technique d'escompte

Introduction: **La technique d'escompte est un moyen de mobilisation des effets de commerce (lettre de change et billet à ordre). En cas de besoin de liquidité, une entreprise peut mettre auprès de sa banque avant la date d'échéance ses effets de commerces détenus sur ces clients. En acceptant l'effet la banque retient sa contrepartie (agio).**

1-Les éléments d'agio

L'agio est composé de deux éléments : l'escompte commercial et **les commissions**

1.1- L'escompte

L'escompte est la rémunération (intérêt) reçue par la banque suite à la remise de l'effet avant l'échéance. Le montant d'escompte est calculé sur la base de montant nominal de l'effet et en fonction de la durée qui reste à courir.

Chapitre 2: La technique d’escompte

1-Les éléments d’agio

1.1- L’escompte

Formule de calcul

$$E = \frac{V \times t \times n}{360}$$

Avec

E : montant d’escompte

V : la valeur nominale de l’effet escompté

t : Taux d’escompte

n : la durée en nombre de jours entre la date de remise de l’effet et la date d’échéance

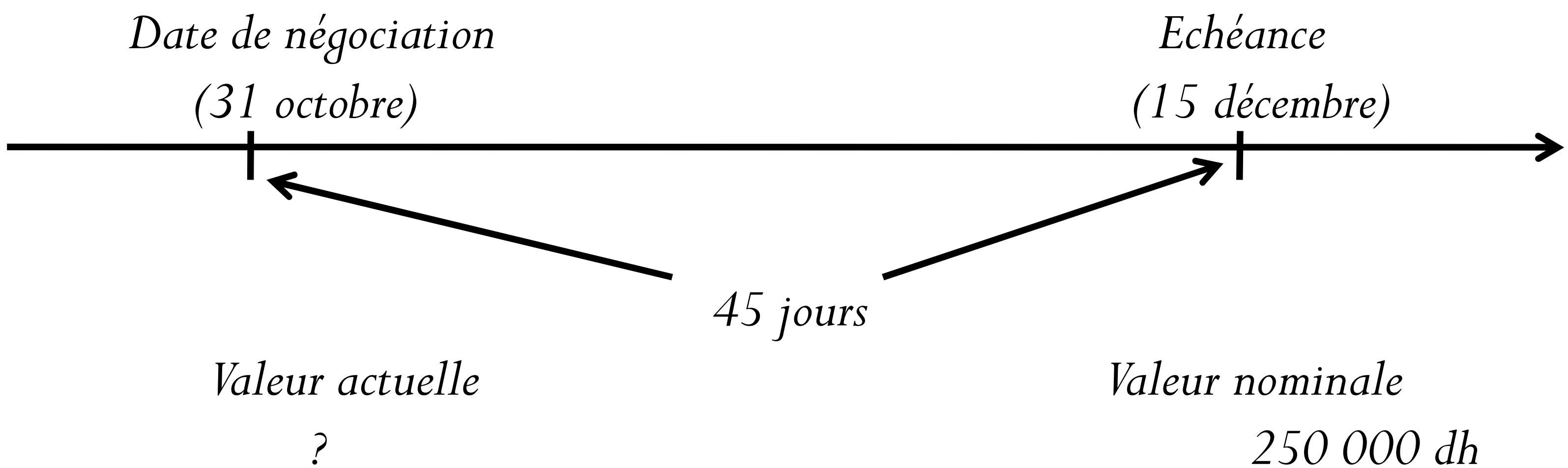
Chapitre 2: La technique d'escompte

1-Les éléments d'agio

1.1- L'escompte

Exemple *:Un commerçant a négocié au 31 octobre un effet de commerce de nominal 250 000 dh et échéant le 15 décembre au taux de 9,5%.*
Quel est alors le montant de l'escompte ?

Résolution



Le nombre de jours de la date de négociation à la date d'échéance (n) =45 jours

Le montant de l'escompte :

$$E = \frac{V * t * n}{36\,000} = \frac{250\,000 * 9{,}5 * 45}{36\,000} = \mathbf{2\,968{,}75\ dh}$$

Chapitre 2: La technique d'escompte

1-Les éléments d'agio

1.1- L'escompte

La valeur actuelle:

C'est la différence entre la valeur nominale de l'effet et le montant d'escompte. Elle exprime le montant versé par la banque après acceptation de l'effet.

Valeur actuelle = Valeur nominale (V) – Escompte (E)

Exemple (suite)

Nous retenons l'exemple précédent.
Valeur actuelle = 250 000 – 2 968,75 = ***247 031,25 dh***

1-Les éléments d’agio

1.2- Les commissions

Les commissions s’ajoutent à l’escompte. Elles représentent la contrepartie de l’acceptation et le traitement des effets.

On distingue deux types :

- Les commissions variables qui dépendent du montant de l’effet. Elles sont exprimées en pourcentage de la valeur nominale d’effet ;
- Les commissions variables qui dépendent du montant de l’effet et du temps. Il s’agit à de la commission d’endos qui se calcule comme l’escompte au prorata temporis ;
- Les commissions fixes qui sont retenues quelque soit la valeur nominale de l’effet.

C’est la différence entre la valeur nominale de l’effet et le montant d’escompte. Elle exprime le montant versé par la banque après acceptation de l’effet.

Agio (HT) = Escompte +Commissions
Agio (TTC) = Escompte + Commissions + TVA
Valeur nette = Valeur nominale – Agio (TTC)

Chapitre 2: La technique d'escompte

1-Les éléments d'agio

1.2- Les commissions

Exemple

Un effet de nominal de 70 000 dh, ayant 30 jours à courir, est négocié aux conditions suivantes :

Taux d'escompte 5% ;

Commission d'endos : 2% ;

Commission supplémentaire : 0,25% de la valeur nominale ;

Commission de manipulation : 3 dh par effet ;

TVA : 10%

Calculer le montant de l'agio (TTC)

Quel est le montant versé par la banque (valeur actuelle) ?

1-Les éléments d'agio

1.2- Les commissions

Résolution

Calcul de l'agio

Escompte	$\frac{70\,000 \times 30 \times 5}{36\,000}$	= 291,67
Commission d'endos	$\frac{70\,000 \times 30 \times 2}{36\,000}$	= 116,67
Commission supplémentaire	$70\,000 \times 0{,}25\%$	= 175
Commission de manipulation		= *3*

Agio (HT)		***586,34***
TVA (10%)		*58, 634*

Agio (TTC)		***644,974***

Valeur actuelle = 70 000 – 644,974 = **69 355,026** ***dh***

2-Bordereau d'escompte

En cas de la remise de plusieurs effets à l'escompte, la banque doit établir le bordereau d'escompte. C'est un état qui décrit le détail de calcul et montre le montant nette à recevoir par le vendeur des effets.

Exemple

Etablir le bordereau des effets présentés à l'escompte à la banque, le 5 juillet 2017, aux conditions suivantes :

Taux d'escompte : 10%

Minimum d'escompte : 100

Commission d'acceptation : 3 dh par bordereau d'escompte ;

Commission générale : 0,25% de la valeur nominale totale ;

TVA / agio : 10%

Effet	*Nominal*	*Échéance*
1er effet	*210 000 dh*	*13 octobre 2017*
2ème effet	*300 000 dh*	*17 août 2017*
3ème effet	*120 000 dh*	*03 septembre 2017*

2-Bordereau d'escompte

Résolution

Bordereau d'escompte

Effet	Valeur nominale	Date de négociation	Echéance	Nombre de jours	Escompte
1	*210 000*	*05/07*	*13/10*	*100 jours*	$\frac{210\,000 \times 100 \times 10}{36\,000} = 5833,33$
2	*300 000*	*05/07*	*17/08*	*43 jours*	*3583,333*
3	*120 000*	*05/07*	*03/09*	*60 jours*	*2000*
	= 630 000			***Total d'Escompte*** *+Commission générale* *+Commission d'acceptation*	***11416,66*** 630 000 x 0,25% = 1575 *3*
				Agio (HT) *TVA 10%*	***= 12 994,66*** *1299,466*
				Agio (TTC)	***= 14 294,126***
	Valeur nette = 630 000 – 14 294,126 = 615 705,874 dh				

Chapitre 2: La technique d'escompte

3-Le taux réel d'escompte, le taux de revient et le taux de rendement

3.1- Le taux réel d'escompte

C'est le taux unique (Te) qu'on peut appliquer à la valeur nominale de l'effet pour obtenir par un seul et unique calcul le montant de l'agio à retenir par la banque.
Le taux réel d'escompte est le taux qui remplace l'ensemble des taux d'escompte et des commissions.

$$\frac{V * Te * n}{36\,000} = Agio \;; \quad Te = \frac{36\,000 * Agio}{V * n}$$

Exemple

Un effet de commerce, ayant 50 jours à courir, est négocié aux conditions suivantes :
La valeur nominale 50 000Dh;
Taux d'escompte 4,5% ;
Change de place : 0,5‰ de la valeur nominale ;
Commission d'endos : 2% l'an;
Commission supplémentaire : 1‰ de la valeur nominale ;
Commission de manipulation : 2 dh par effet ;

3-Le taux réel d'escompte, le taux de revient et le taux de rendement

3.1- Le taux réel d'escompte

Résolution

Calcul d'agio

Escompte .... $\dfrac{50\,000 \times 50 \times 4{,}5}{36\,000} = 312{,}5$

Change de place .... $50\,000 \times 0{,}5‰ = 25$

Commission d'endos..................... $\dfrac{50\,000 \times 50 \times 2}{36\,000} = 138{,}89$

Commission supplémentaire............ $50\,000 \times 1‰ = 50$

Commission de manipulation................................. *2*

Agio= 528,39

Le taux réel de l'agio (Ta) $\dfrac{50\,000 * Te * 50}{36\,000} = 528{,}39\ dh$

$\boxed{Te = 7{,}6\%}$

3-Le taux réel d'escompte, le taux de revient et le taux de rendement

3.2- Le taux de revient (Pour le négociateur d'effet)

Le taux de revient est le taux réel du crédit obtenu par l'entreprise qui négocie l'effet. Il est calculé sur la base de la valeur nette, c'est-à-dire de la somme effectivement prêtée par la banque.

$$\boxed{\frac{Valeur\ nette * Tr * n}{36\,000} = Agio\ ; \quad Tr = \frac{Agio * 36\,000}{Valeur\ nette * n}}$$

Exemple

Nous retenons l'exemple précédent

$$Valeur\ nette = 50\,000 - 528{,}39 = 49\,471{,}61$$

Taux de revient

$$49\,471{,}61\ x\ \frac{Tr}{100}\ x\ \frac{50}{360} = 528{,}39\ dh$$

$$\mathbf{Tr = 7{,}69\ \%}$$

3-Le taux réel d'escompte, le taux de revient et le taux de rendement

3.3- Le taux de rendement ou taux de placement (pour le banquier)

Le taux de rendement (Tp) exprime le gain net procuré par l'opération d'escompte. Il concerne la banque escompteur d'effet.

Comme le taux de revient, le calcul du taux de rendement s'effectue sur la base de la somme prêtée en tenant compte des cas suivants :

- **Si les commissions perçues par le banquier représentent la contrepartie des frais réellement engagés. Le revenu du banquier n'est autre que l'escompte ;**
- **Si les frais réellement engagés sont inférieurs au montant des commissions perçues, la différence s'ajoute à l'escompte ;**
- **Si les frais réellement engagés sont supérieurs au montant des commissions perçues, On impute la différence sur l'escompte.**

$$\frac{Valeur\ nette * Tp * n}{36\,000} = Gain\ net\ ; \quad Tp = \frac{Gain\ net * 36\,000}{Valeur\ nette * n}$$

3-Le taux réel d'escompte, le taux de revient et le taux de rendement

3.3- Le taux de rendement ou taux de placement (pour le banquier)

Exemple

Une banque escompte un effet de 150 000 dh, payable dans 60 jours, au taux de 8%. Quel est le taux de rendement sachant que les commissions perçues représentent une récupération de frais réellement engagés par la banque.

Résolution

Pour calculer le taux de rendement, il faut tenir compte de la récupération plus ou moins importante des frais réellement engagés par la banque. Dans l'exemple, les frais engagés sont égales aux commissions.

- Escompte ……………………………….. $\dfrac{150\,000 * 8 * 60}{36\,000} = 2\,000\ Dh\ (gain\ net)$
- Valeur nette ………………………….. $150\,000 - 2\,000 = 148\,000\ dh$

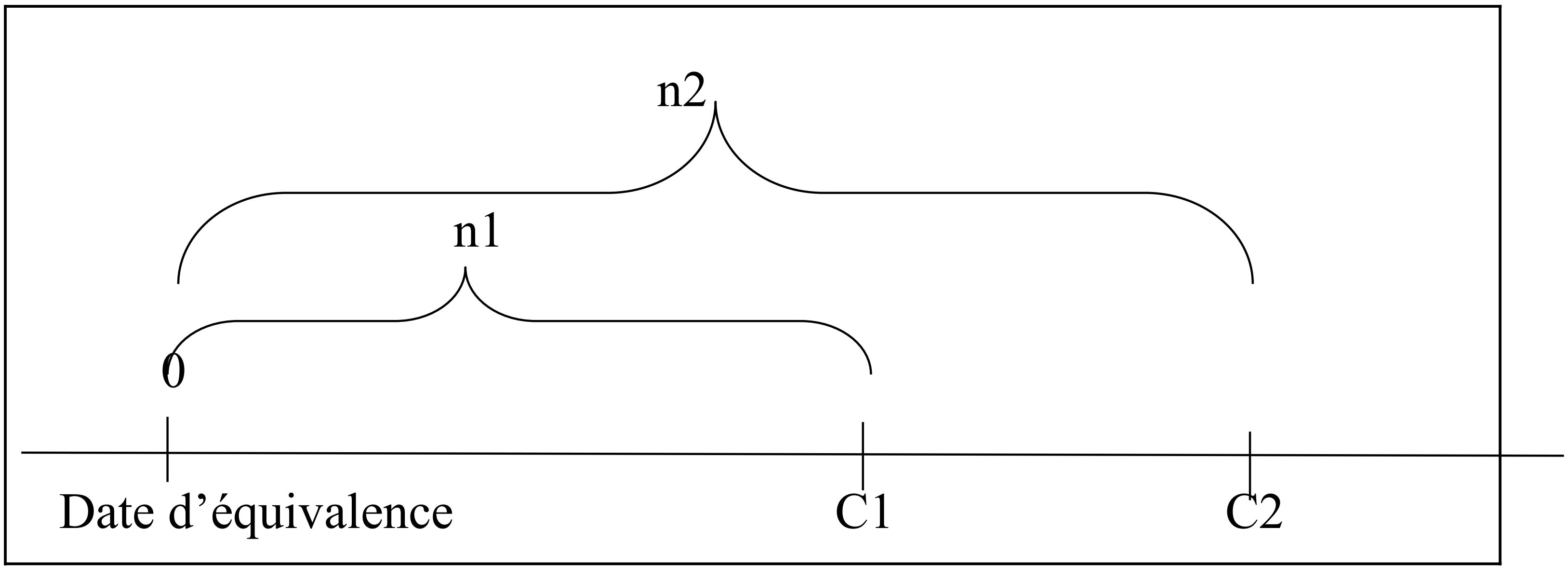
$$taux\ de\ rendement = \frac{2\,000 * 36\,000}{148\,000 * 60} = 8\,880\,000 = 8{,}10\%$$

Chapitre 3: La technique d'équivalence

1-Equivalence des capitaux

On dit que deux capitaux sont équivalents à une date donnée s'ils ont la même valeur actuelle à cette date.

La technique d'équivalence permet donc d'actualiser les valeurs des capitaux.



A la date d'équivalence les valeurs actuelles des deux capitaux sont égales.

Avec

C_1 et C_2 : Montant de 1ère et 2ème capital ;

n_1 et n_2 : Nombre de jours de 1ère et 2ème capital ;

t : taux d'intérêt.

$$\boxed{C_1 - \frac{C_1 * t * n_1}{36\,000} = C_2 - \frac{C_2 * t * n_2}{36\,000}}$$

1-Equivalence des capitaux

C_1= 6 000 Dh échéant le 31 mars et C_2= 6 050 Dh échéant le 7 mai. le taux de placement est de 8%

Le 1er mars, le premier capital a pour valeur actuelle :

$$C_1 - \frac{C_1 * t * n_1}{36\,000} = 6000 - \frac{6000 * 8 * 30j}{36\,000} = 5\,960Dh$$

Le 1er mars, le deuxième capital a pour valeur actuelle :

$$C_2 - \frac{C_2 * t * n_2}{36\,000} = 6\,050 - \frac{6\,050 * 8 * 67\,j}{36\,000} = 5\,960\,dh$$

A la date du 1er mars, les deux capitaux sont équivalents.

2-Renouvellement des effets de commerce

Un effet de commerce est renégociable. Une entreprise cliente peut demander le report de la date d'échéance. Pour renouveler l'effet avec de nouvelles conditions, on utilise aussi la technique d'équivalence.

Deux effets sont équivalents à une date, appelée date d'équivalence, si escomptés au même taux, ils ont la même valeur à cette date.

$$\boxed{V_1 - \frac{V_1 * t * n_1}{36\,000} = V_2 - \frac{V_2 * t * n_2}{36\,000}}$$

Avec

V1et V2 : valeurs nominales de 1ère et 2ème effet ;

n1 et n2 : nombre de jours de 1ère et 2ème effet ;

t : taux d'escompte.

2-Renouvellement des effets de commerce

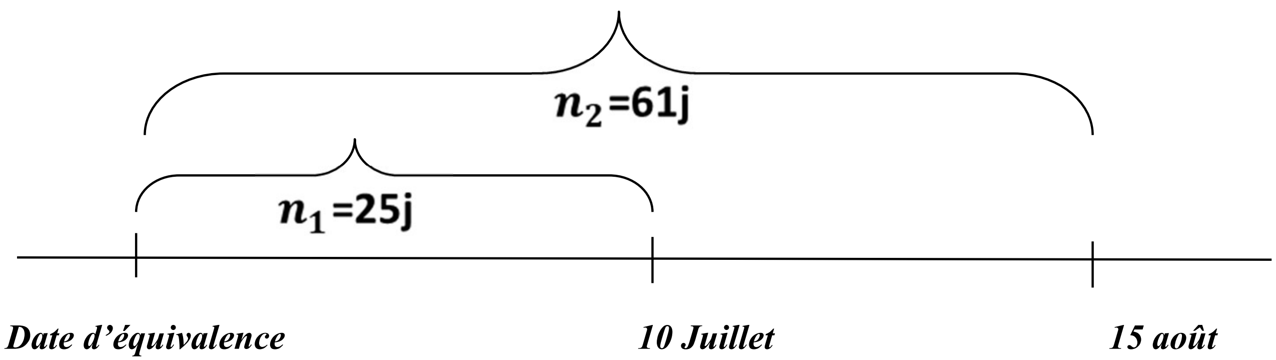
Exemple

Un commerçant remplace, à la demande de son client, un effet de valeur nominale de 230 000 dh échéant le 10 juillet, par un autre effet échéant le 15 août, le remplacement est effectué le 15 juin. Le taux d'escompte est de 10%.

Quelle doit être la valeur nominale de l'effet remplaçant ?

Résolution

Nous représentons d'abord les données sur l'axe du temps



A la date d'équivalence, on aura :

$$230\,000 - \frac{230\,000 * 10 * 25j}{36\,000} = V_2 - \frac{V_2 * 10 * 61j}{36\,000} \qquad 228\,402{,}7778 = 0{,}9831\, V_2$$

La valeur nominale de l'effet remplaçant est donc : $\underline{V_2 = 232\,329{,}14\ dh}$

Chapitre 3: La technique d'équivalence

3- Equivalence de plusieurs effets

3.1- Echéance commune

On appelle échéance commune, la détermination de la valeur nominale ou de l'échéance de l'effet unique équivalent à plusieurs autres effets.

$$V - \frac{V\,x\,t\,x\,n}{36\,000} = \left(V_1 - \frac{V_1\,x\,t\,x\,n_1}{36\,000}\right) + \left(V_2 - \frac{V_2\,x\,t\,x\,n_2}{36\,000}\right) + \left(V_3 - \frac{V_3\,x\,t\,x\,n_3}{36\,000}\right) \ldots\ldots\ldots$$

Exemple 1

Un commerçant souhaite remplacer l'ensemble de ces effets par un effet unique échéant dans 60 jours :

1er effet : 36 000 dh échéant dans 52 jours ;

2ème effet : 50 000 dh échéant dans 72 jours ;

3ème effet : 63 000 échéant dans 100 jours

Quelle doit être la valeur de l'effet unique ? taux d'escompte est de 5%

3- Equivalence de plusieurs effets

3.1- Echéance commune

Résolution

A la date d'équivalence, la valeur actuelle de l'effet unique égale à la somme des valeurs actuelles de l'ensemble des effets remplacés.

$$V - \frac{V * t * n}{36\,000} = \left(V_1 - \frac{V_1 * t * n_1}{36\,000}\right) + \left(V_2 - \frac{V_2 * t * n_2}{36\,000}\right) + \left(V_3 - \frac{V_3 * t * n_3}{36\,000}\right) \ldots\ldots\ldots$$

$$V - \frac{V * 5 * 60}{36\,000} = \left(36\,000 - \frac{36\,000 \times 5 \times 50}{36\,000}\right) + \left(50\,000 - \frac{50\,000 \times 5 \times 72}{36\,000}\right) + \left(63\,000 - \frac{63\,000 \times 5 \times 100}{36\,000}\right)$$

$$0{,}992\,V = 147\,375$$

La valeur de l'effet unique est donc :

$$\underline{V = 148\,563{,}51\ dh}$$

Chapitre 3: La technique d'équivalence

3- Equivalence de plusieurs effets

3.1- Echéance commune

Exemple 2

Un commerçant remplace 3 effets par un effet unique de valeur nominale 132 000 dh au taux d'escompte de 8% :

Effet (1) de 54 000 échéant dans 20 jours ;

Effet (2) de 36 000 dh échéant dans 40 jours ;

Effet (3) de 40 500 échéant dans 60 jours.

Déterminer l'échéance commune de ces 3 effets ?

Résolution

A la date d'équivalence, la valeur actuelle de l'effet unique égale à la somme des valeurs actuelles de l'ensemble des effets remplacés.

$$132\,000 - \frac{132\,000 * 8 * n}{36\,000} = \left(54\,000 - \frac{54\,000 \times 8 \times 20}{36\,000}\right) + \left(36\,000 - \frac{36\,000 \times 8 \times 40}{36\,000}\right) + \left(40\,500 - \frac{40\,500 \times 8 \times 60}{36\,000}\right)$$

$$132\,000 - 29{,}33\, n = 129\,400 \quad donc \quad \boldsymbol{n = 88{,}64\ jours}\ (Echéance\ commune)$$

Chapitre 3: La technique d'équivalence

3- Equivalence de plusieurs effets

3.2- Echéance moyenne

C'est l'échéance de l'effet équivalent à un groupe d'effets dont la valeur nominale égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés.

$$V - \frac{V * t * n}{36\,000} = \left(V1 - \frac{V1 * t * n1}{36\,000}\right)\left(V2 - \frac{V2 * t * n2}{36\,000}\right) + \left(V3 - \frac{V3 * t * n3}{36\,000}\right) \ldots \ldots \ldots$$

Puisque : $V = V1 + V2 + V3 \ldots$

La formule devient

$$V * t * n = (V1 * t * n1) + (V2 * t * n2) + (V3 * t * n2) \ldots$$

$$n = \frac{(V1 * n1) + (V2 * n2) + (V3 * n3) \ldots}{V1 + V2 + V3 + \cdots}$$

3- Equivalence de plusieurs effets

3.2- Echéance moyenne

Exemple

Un commerçant dispose de 3 effets :

Un effet E1 de valeur nominale 20 000 dh échéant le 10 mars;

Un effet E2 de valeur nominale 24 000 dh échéant le 10 mai;

Un effet E3 de valeur nominale 15 000 dh échéant le 10 avril.

Le commerçant veut se libérer en une seule fois en payant 59 000 dh. Le taux est de 10%

Quelle est alors la date d'échéance de l'effet unique ?

Résolution

La somme des 3 effets est égale à la valeur nominale de l'effet remplaçant. Il s'agit donc de déterminer l'échéance moyenne.

Nous pouvons choisir le 10 mars comme date d'équivalence.

$$n = \frac{(2\,000 * 0) + (15\,000 * 31) + (24\,000 * 61)}{59\,000} = \mathbf{32,69\ jours}$$

L'échéance de l'effet remplaçant est le 11 avril

Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales

-Tanger-

Partie 2. Les opérations financières à long terme

1ère Année du Cycle licence

Tronc Commun Gestion
Semestre 2 / Groupes:

- CFF GC-MRH GB
- MRH GA

Animé par:

Prof: **BENCHEIKH**

Chapitre 4: Les intérêts composés

Les intérêts composés sont utilisés pour les opérations financières de long terme, dont la durée est supérieure à un an : Crédit immobilier, emprunt à long terme…

1-Formule de base

Le calcul des intérêts composés s'effectue en fonction du principe de la capitalisation des intérêts, c'est-à-dire que les intérêts s'ajoutent au capital pour produire eux-mêmes des intérêts.

Soit :

C : montant du capital placé ;

n : la durée de placement exprimée en années ;

i : le taux d'intérêt pour un dirham de capital et pour une durée d'une année

Le tableau suivant montre les calculs des intérêts et de capitalisation annuelle des intérêts.

Année	Capital au début de l'année	Intérêts de l'année	Valeur acquise après la fin de l'année
1	C	$C * i$	$C + (C * i) = C\,(1+i)$
2	$C\,(1+i)$	$[C\,(1+i)] * i$	$C\,(1+i) + [C\,(1+i)] * i = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$[C(1+i)^2] * i$	$C(1+i)^2 + [C(1+i)^2] * i = C(1+i)^3$
…	….	….	….
n	$C(1+i)^{n-1}$	$[C(1+i)^{n-1}] * i$	$C(1+i)^{n-1} + [C(1+i)^{n-1}] * i = C(1+i)^n$

1-Formule de base

La valeur acquise (Cn) est obtenue par l'application de la formule suivante :

$$\boxed{C_n = C(1+i)^n}$$

Quant aux intérêts (I), ils sont calculés par la différence entre la valeur acquise (C_n) et le capital initialement placé (C).

$$\boxed{I = C_n - C = C\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

Chapitre 4: Les intérêts composés

1-Formule de base

Remarques

- **Le taux de placement et la durée de placement s'expriment par référence à la période de capitalisation des intérêts. Si nous avons un taux annuel, la durée doit être exprimée aussi en termes des années ;**
- **Les valeurs acquises suivent une progression géométrique de raison;**
- **Contrairement aux intérêts simples qui donnent directement le montant d'intérêts d'un placement, la formule de l'intérêt compose donne la valeur acquise par le capital placé.**

Exemple (1)

Un capital de 30 000 dh est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. La capitalisation des intérêts est annuelle. Calculer la valeur acquise après 8 ans.

Résolution

La durée et le taux sont exprimés par référence à la même durée que la période de capitalisation.

On peut appliquer donc la formule :

$$\textit{la valeur acquise après 8 ans} : C_8 = 30\,000\ (1+0{,}06)^8 = \mathbf{47\,815{,}44\ dh}$$

$$\textit{l'intérêt total reçu après 8 ans} : I = 47\,815{,}44 - 30\,000 = \mathbf{17\,815{,}44\ dh}$$

Nous pouvons utiliser les tables financières : la table financière n°1 donne directement les valeurs acquises pour 1 dh placé.

1-Formule de base

Exemple (2)

Un capital de 10 000 dh est placé à intérêts composés au taux trimestriel de 1,25%. La capitalisation des intérêts est trimestrielle. Calculer la valeur acquise après 5 ans.

Résolution

La durée et le taux sont exprimés différemment de la période de capitalisation. En conséquence, pour appliquer la formule, on exprime la période de placement en termes de trimestres.

5 ans = 20 trimestres

$$la\ valeur\ acquise\ après\ 5\ ans\ (20\ trimestres) :$$

$$C_{20} = 10\,000\,(1+0{,}0125)^{20} \qquad = 12\,820{,}37\ dh$$

$$Intérêt\ total\ perçu : I = 12\,820{,}37 - 10\,000 = 2\,820{,}37\ dh$$

2-Calcul de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de période non entier

Très souvent la durée de placement est exprimée en termes d'années et de mois. Par exemple, un placement du capital pour une durée de 3 ans et 5 mois.
Pour trouver la valeur acquise, nous pouvons utiliser deux méthodes : la méthode rationnelle ou la méthode commerciale

2.1- La méthode rationnelle

La méthode rationnelle consiste à appliquer la formule de l'intérêt composé sur la partie entière, exprimée en termes d'années, et l'intérêt simple sur le reste de la durée, exprimée en termes de mois.

2-Calcul de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de période non entier

2.1- La méthode rationnelle

Exemple

Un capital de 30 000 dh est placé à intérêts composés pour une durée de 8 ans et 3 mois au taux annuel de 5%. La capitalisation est annuelle. Calculer la valeur acquise.

Résolution

Le nombre de période est non entier, on calculera d'abord la valeur acquise par rapport à 8 ans et on ajoutera les intérêts simples que produira cette valeur acquise pendant 3 mois.

$$\textit{la valeur acquise après 8 ans}:\ C_8 = 30\,000\,(1+0{,}05)^8 = 44\,323{,}66\ dh$$

On ajoute à ce montant les intérêts simples calculés sur les 3 mois restants

$$I = \frac{44\,323{,}66 \times 5 \times 3}{1200} = 554{,}03\ dh$$

La valeur acquise de la période :

$$C_{8ans\ et\ 3\ mois} = 44\,323{,}66 + 554{,}03 = \mathbf{44\,877{,}71\ dh}$$

2-Calcul de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de période non entier

2.2- La méthode commerciale

On applique directement la formule de l'intérêt composé en exprimant la durée du placement en nombre d'années.

Exemple

On retient le même exemple précédent

$$n = 8\,ans\ et\ 3\,mois = 8 + \frac{3}{12} = 8{,}25\,ans$$

La valeur acquise est calculée directement.

$$C_{8+3/12} = 30\,000\,(1+0{,}05)^{8+3/12} = 30\,000\,(1+0{,}05)^{8{,}25} = \mathbf{44\,867,61\ dh}$$

Chapitre 4: Les intérêts composés

3-Taux équivalents

Pour passer d'un taux annuel à un autre taux mensuel par exemple dans le cas des intérêts simples, il suffit de calculer le taux proportionnel. Cela n'est pas possible lorsqu'on a les intérêts composés. Il faut trouver un nouveau taux, appelé le taux équivalent.

3.1- Définition

Deux taux, correspondant à des périodes de capitalisations différentes, sont équivalents s'ils donnent, pour une même période de placement, à une même valeur acquise à intérêts composés.

Si on suppose que

- **C : capital initial**
- **i : taux d'intérêt**
- **n : nombre d'années de placement**
- **ik : taux correspondant à la période k (sous période)**

Pour trouver le taux équivalent (ik) au taux (i), on applique la formule suivante :

$$\boxed{(1+i) = (1+i_k)^k}$$

3-Taux équivalents

3.2- Les taux d'équivalents au taux annuel

Le taux semestriel i_s équivalent au taux annuel i_a

$$\boxed{(1+i_a) = (1+i_s)^2}$$

Le taux trimestriel i_t équivalent au taux annuel i_a

$$\boxed{(1+i_a) = (1+i_t)^4}$$

Le taux mensuel i_m équivalent au taux annuel i_a

$$\boxed{(1+i_a) = (1+i_m)^{12}}$$

3-Taux équivalents

3.2- Les taux d'équivalents au taux annuel

Exemple

Calculer le taux semestriel équivalent au taux annuel de 6%

Résolution

$$(1+0{,}06) = (1+\ i_s\ )^2$$

$$(1+\ i_s\ ) = (1+0{,}06)^{\frac{1}{2}}$$

$$i_s\ = (1+0{,}06)^{\frac{1}{2}} - 1 = \ 0{,}02956 = 2{,}956\%$$

Chapitre 4: Les intérêts composés

4-La valeur actuelle

La valeur actuelle est la somme qu'il faut placer à intérêt composé à la date 0 pour obtenir un capital à la date n.

$$\boxed{C_0 = C_n(1+i)^{-n}}$$

Exemple

Quelle somme faut-il placer à intérêts composés au taux de 7,5% pour obtenir au bout de 10 ans un capital de 123 661,92 dh ? Capitalisation annuelle.

Résolution

$$Il\ faut\ placé\ donc :\ C_0 = 60\,000\ dh$$

5-Utilisation de la formule de base : $C_n = C(1+i)^n$

5.1- Recherche du taux d'intérêt

On connait le capital initial, la durée et la valeur acquise ; le taux d'intérêt est obtenu en développant la formule de base

$$C_n = C(1+i)^n$$

La relation peut s'écrire sous la forme

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C}$$

Finalement, on aura :

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}} - 1}$$

5-Utilisation de la formule de base : $C_n = C(1+i)^n$

5.1- Recherche du taux d'intérêt

Exemple

Un capital de 800 dh est placé à intérêts composés, pendant une durée de 2 ans, génère une valeur acquise de 1 000 dh. Quel est donc le taux d'intérêt ? La capitalisation des intérêts est annuelle.

Résolution

En appliquant la formule, on trouve :

$$i = \sqrt[2]{\frac{1\,000}{800}} - 1 = 11{,}8\ \%$$

5-Utilisation de la formule de base : $C_n = C(1+i)^n$

5.2- Recherche de la durée

Le capital initial, le taux d'intérêt et la valeur acquise sont connus ; la durée peut être obtenue en développant toujours la formule de base.

On a :

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C}$$

pour trouver (n), il faut introduire de logarithme :

$$\ln(1+i)^n = \ln(\frac{C_n}{C})$$

$$n * \ln(1+i) = \ln(C_n) - \ln(C_0)$$

$$\boxed{n = \frac{\ln(C_n) - \ln(C_0)}{\ln(1+i)}}$$

5-Utilisation de la formule de base : $C_n = C(1+i)^n$

5.2- Recherche de la durée

Exemple

Un capital de 800dh est placé à intérêts composés au taux de 10% génère une valeur acquise de 1 000 dh. Quelle est donc la durée de placement ? La capitalisation des intérêts est annuelle.

Résolution

En appliquant la formule, on obtient :

$$n = \frac{\ln(1\,000) - \ln(800)}{\ln(1+0{,}1)} = \mathbf{2{,}34\ ans}$$

Chapitre 5 : Les annuités

1-Définition et champ d'application

Définition

On appelle annuités une suite de flux monétaires perçus ou réglés à intervalles de temps égaux.

Le terme annuité est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme annuité par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.

Remarque:

- **Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.**
- **Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période.**
- **Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.**

Chapitre 5 : Les annuités

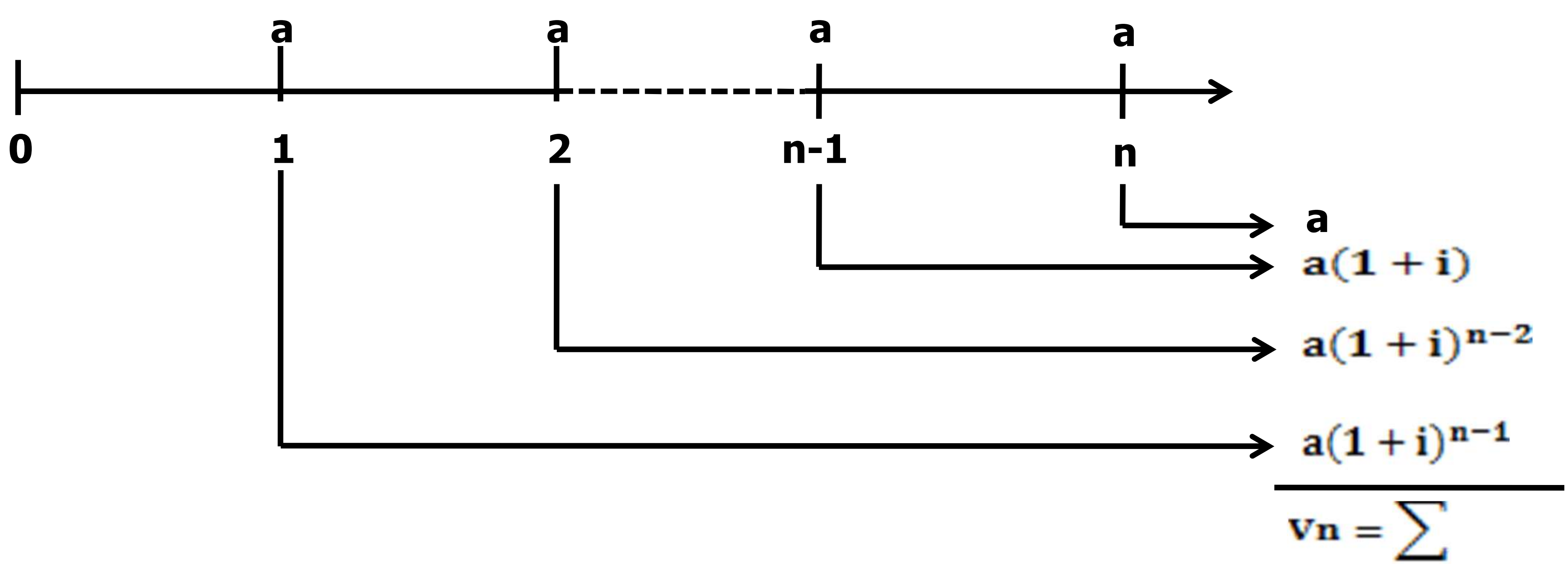
2-Les annuités constantes

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.

2.1- Les annuités constantes de fin de période

2.1.1. La valeur acquise (Vn)

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités (Vn) exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.



Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.1- Les annuités constantes de fin de période

2.1.1. La valeur acquise (Vn)

Si nous désignons par:

Vn : la valeur acquise par la suite des annuités
a : l'annuité constante de fin de période
n : le nombre de périodes (d'annuités)
i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors:

$$Vn = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$Vn = a(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

$$Vn = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \longrightarrow \boxed{Vn = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.1- Les annuités constantes de fin de période

Exemple :

Calculer la valeur acquise, au moment du dernier versement, par une suite de 15 annuités de 35 000 Dh chacune. Taux : 10% l'an.

solution :

$$\boxed{V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \longrightarrow V_{15} = 35\,000\,\frac{1.1^{15} - 1}{0.1} = 1\,112\,036.86$$

Exemple :

Combien faut-il verser à la fin de chaque semestre pendant 8 ans, pour constituer au moment du dernier versement, un capital de 450 000Dh . Taux semestriel : 4.5% .

solution :

$$a = V_n\,\frac{i}{(1+i)^n - 1} \longrightarrow a = 450\,000\,\frac{0.045}{(1.045)^{16} - 1} = 19\,806.92\text{Dh}$$

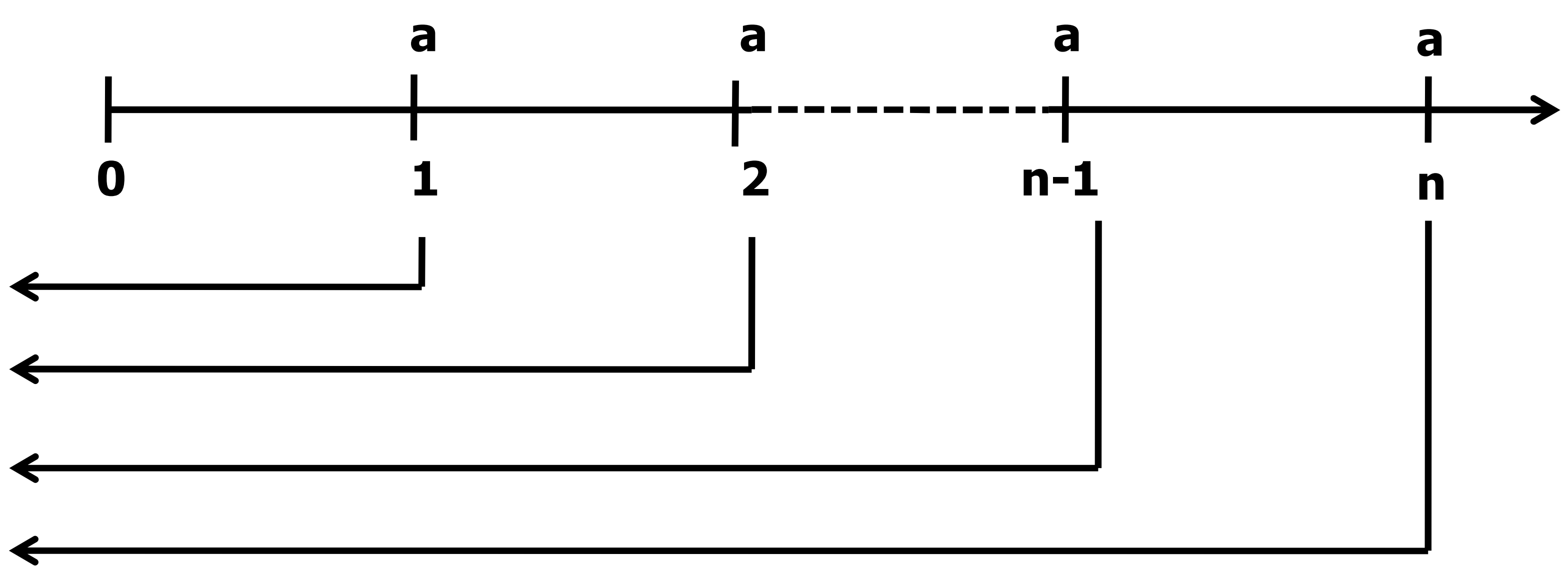
Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.1- Les annuités constantes de fin de période

2.1.2. La valeur actuelle (Va)

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées (V0) exprimée à la date origine.



$$a(1+i)^{-1}$$

$$a(1+i)^{-2}$$

$$a(1+i)^{-n+1}$$

$$a(1+i)^{-n}$$

$$Vo = \sum$$

Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.1- Les annuités constantes de fin de période

2.1.2. La valeur actuelle (Va)

Si nous désignons par:

Vo : la valeur actuelle par la suite des annuités

a : l'annuité constante de fin de période

n : le nombre de périodes (d'annuités)

i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors:

$$Vo = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-n+1} + a(1+i)^{-n}$$

$$Vo = a\left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}\right)$$

$$Vo = a(1+i)^{-1}\left(1 + (1+i)^{-1} + \cdots + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1}\right)$$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$ **et comprenant n termes. La formule devient :**

$$Vo = a(1+i)^{-1}\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} \longrightarrow Vo = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1} \longrightarrow \boxed{Vo = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.1- Les annuités constantes de fin de période

Exemple :

Quelle est la valeur actuelle au taux d'actualisation de 6% d'une suite d'annuité constante de 1500 Dirhams versées à la fin de chaque année pendant 7 ans

Solution :

La valeur actuelle de cette suite d'annuités constantes est donc :

$$\boxed{V_o = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \longrightarrow V_o = 1500\,\frac{1-(1.06)^{-7}}{0.06} = 8373.57\,Dhs$$

Exemple :

- **Quel montant faut-il placer chaque année au taux 6%, et ce pendant 20 ans, pour pouvoir obtenir à l'échéance 100 000 Dhs ?**
- **De combien doit-on disposer aujourd'hui si l'on désire retirer 1000 Dhs chaque année pendant quatre ans sachant que le taux de placement est de 5,5% ?**

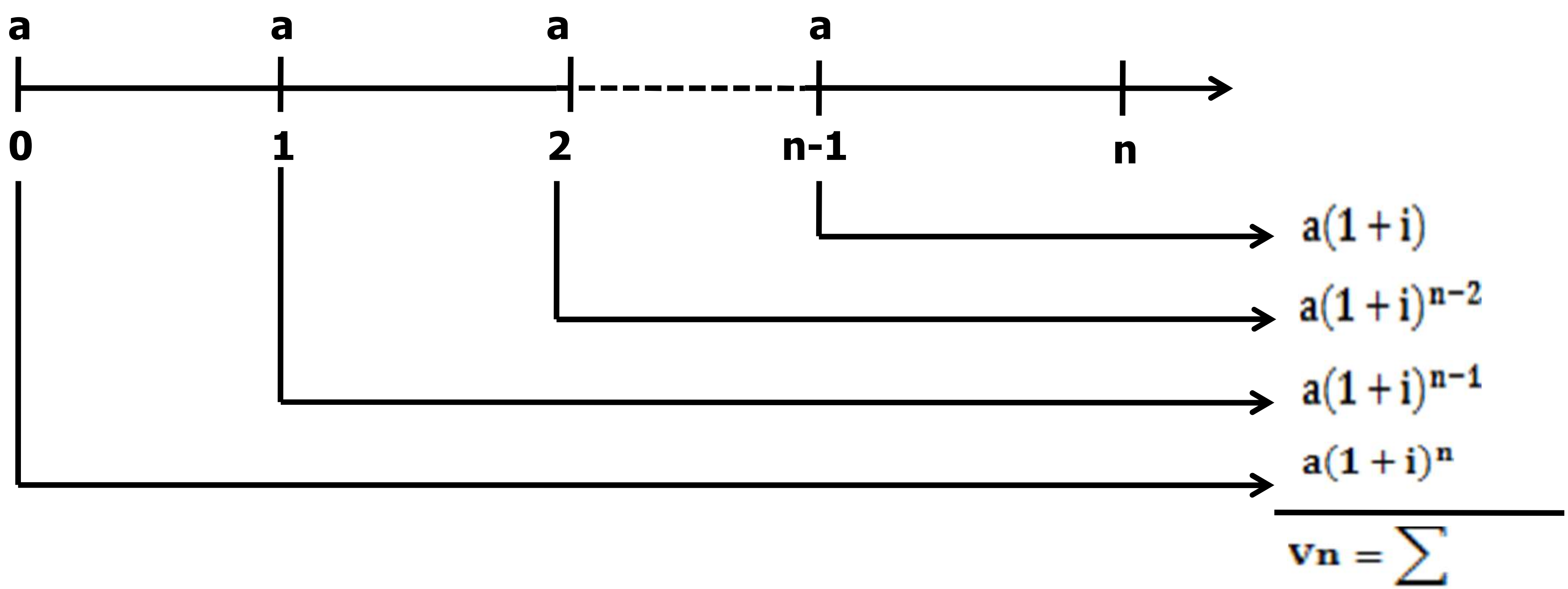
Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.2- Les annuités constantes de début de période

2.2.1. La valeur acquise (Vn)

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant:



Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.2- Les annuités constantes de début de période

2.2.1. La valeur acquise (Vn)

Si nous désignons par:

Vn : la valeur acquise par la suite des annuités
a : l'annuité constante de fin de période
n : le nombre de périodes (d'annuités)
i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors:

$$Vn = a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

$$Vn = a(1+i)(1 + (1+i) \quad + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1})$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

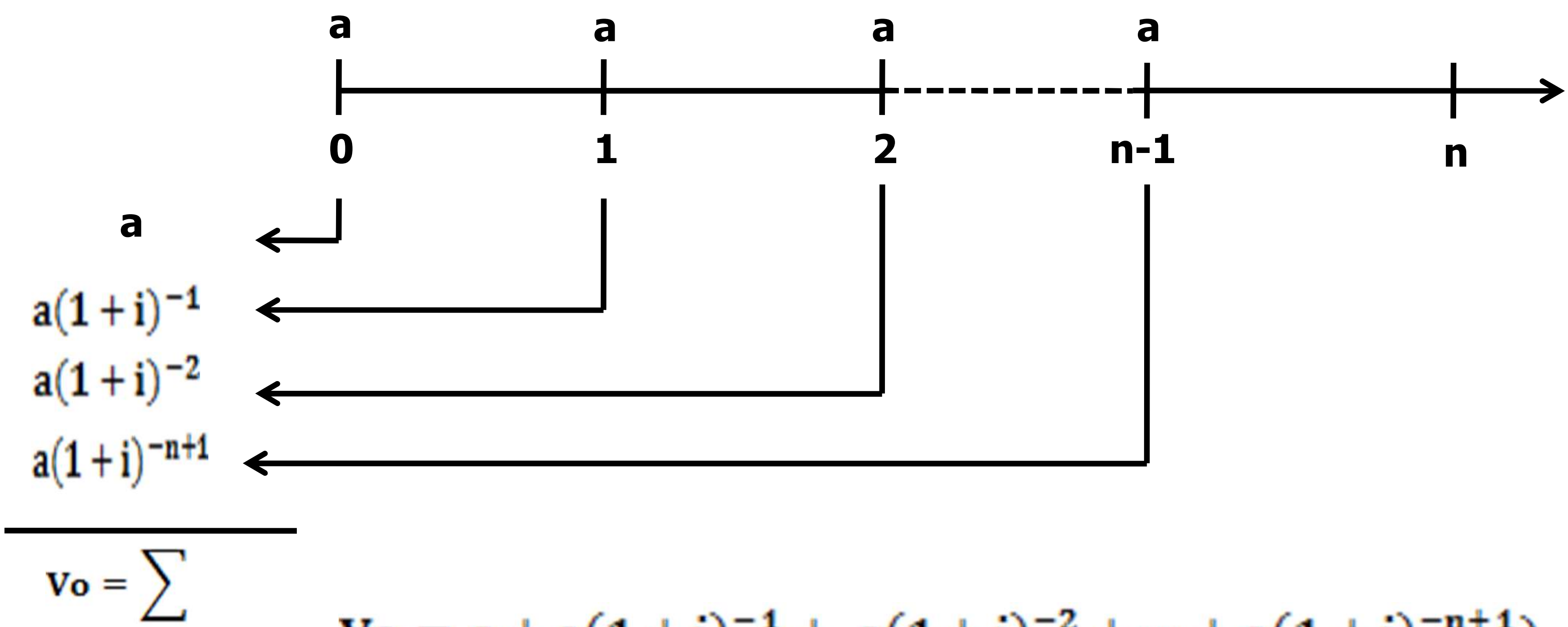
$$Vn = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \longrightarrow \boxed{Vn = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.2- Les annuités constantes de début de période

2.2.2. La valeur actuelle (Va)



$$Vo = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-n+1})$$

$$Vo = a(1 + (1+i)^{-1} + \cdots + (1+i)^{-n+1})$$

Chapitre 5 : Les annuités

2-Les annuités constantes

2.2- Les annuités constantes de début de période

2.2.2. La valeur actuelle (Va)

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q=(1+i)^{-1}$ **et comprenant n termes. La formule devient :**

$$Vo = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} \longrightarrow Vo = a\,\frac{(1+i)}{(1+i)}\frac{(1-(1+i)^{-n})}{(1-(1+i)^{-1})}$$

D'où:

$$\boxed{Vo = a\,(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Chapitre 5 : Les annuités

3-Les annuités variables

3.1- Les annuités quelconques de fin de période

3.1.1. La valeur acquise (Vn)

Si nous désignons par:

Vn : la valeur acquise par la suite des annuités.

a_p : l'annuité à la date p.

n : le nombre de périodes (d'annuités)

i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:

$$Vn = a_n + a_{n-1}(1+i) + \cdots + a_2(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^{n-1})$$

$$\boxed{Vn = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{n-p}}$$

Chapitre 5 : Les annuités

3-Les annuités variables

3.1- Les annuités quelconques de fin de période

3.1.2. La valeur actuelle (Vo)

Si nous désignons par:

Vo : la valeur actuelle par la suite des annuités.

a_p : l'annuité à la date p.

n : le nombre de périodes (d'annuités)

i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:

$$Vo = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \cdots + a_{n-1}(1+i)^{-n+1} + a_n(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{Vo = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{-p}}$$

Chapitre 5 : Les annuités

3-Les annuités variables

3.2- Les annuités quelconques de début de période

3.2.1. La valeur acquise (Vn)

Si nous désignons par:

Vn : la valeur acquise par la suite des annuités.

a_p : l'annuité à la date p.

n : le nombre de périodes (d'annuités)

i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:

$$Vn = a_n(1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + \cdots + a_2(1+i)^{n-1} + a_1(1+i)^n$$

$$\boxed{Vn = \sum_{p=1}^{n} a_p(1+i)^{n-p+1}}$$

Chapitre 5 : Les annuités

3-Les annuités variables

3.2- Les annuités quelconques de début de période

3.2.2. La valeur actuelle (Vo)

Si nous désignons par:

Vo : la valeur actuelle par la suite des annuités.
a_p : l'annuité à la date p.
n : le nombre de périodes (d'annuités)
i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:

$$Vo = a_1 + a_2(1+i)^{-1} + \cdots + a_{n-1}(1+i)^{-n+2} + a_n(1+i)^{-n+1}$$

$$\boxed{Vo = \sum_{p=1}^{n} a_p(1+i)^{-p+1}}$$

Chapitre 5 : Les annuités

Synthèse

Annuités

- **Annuités constantes**
  - **Fin de période**
    - $$Vn = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
    - $$Vo = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$
  - **Début de période**
    - $$Vn = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
    - $$Vo = a\,(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$
- **Annuités variables**
  - **Fin de période**
    - $$Vn = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{n-p}$$
    - $$Vo = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{-p}$$
  - **Début de période**
    - $$Vn = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{n-p+1}$$
    - $$Vo = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+i)^{-p+1}$$

Chapitre 6 : Les emprunts indivis

1-Définition et champ d'application

Définition

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur (un particulier ou une entreprise). Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis (le nominal C de la dette n'est pas divisé). L'emprunt indivis s'oppose donc à l'emprunt obligataire pour lequel l'emprunteur (une grande entreprise ou l'Etat) recourt à une multitude de créanciers (le nominal C de la dette est divisé en titres).

Il est caractérisé par plusieurs éléments:

Le montant de l'emprunt C0 .

La durée de l'emprunt N

Le taux de l'emprunt i.

Remarque:

Les modalités de remboursement peuvent prendre 3 formes:

- **L'amortissement in fine ou emprunt remboursable en une seule fois.**
- **Remboursement par amortissements constants.**
- **Remboursement par annuités constantes.**

2-Le tableau d'amortissement

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 . i$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} . i$	m_p	$a_p = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} . i$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Chapitre 6 : Les emprunts indivis

2-Le tableau d'amortissement

Avec:

C_o : capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt.
I_p : intérêt de la pème période.
m_p : amortissement de la pième période.
a_p : annuité de la pème période.
C_{p-1}: capital restant dû au début de la pème période.

Dans le tableau ci-dessus, l'annuité de remboursement comprend deux éléments :

- **Les intérêts payés sur la période écoulée notés I_p.**
- **Le capital amorti noté m_p**

La formule de calcul :

$$a_p = m_p + i_p$$

Chapitre 6 : Les emprunts indivis

2-Le tableau d'amortissement

Les intérêts payés a la fin de chaque période sont calculés en appliquant le taux nominal au capital restant dû en début de période.

La formule de calcul

$$\boxed{I_p = C_{p-1} * i}$$

3- Quelques propriétés d'un emprunt indivis

3.1- Les capital restant dû

Le capital restant dû après le paiement des k premières annuités est égal au capital initial diminué des k premiers amortissements.

La formule de calcul :

$$\boxed{C_k = C_0 - \sum_{p=1}^{k} m_p}$$

Chapitre 6 : Les emprunts indivis

3- Quelques propriétés d'un emprunt indivis

3.2- La somme des amortissements

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital emprunté:

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} m_p = C_0}$$

Après le paiement du nième amortissement m_n, le capital restant dû est égal à zéro donc la dette non remboursée avant le paiement de m_n est égale à m_n c'est-à-dire $C_{n-1} = m_n$

3- Quelques propriétés d'un emprunt indivis

3.3- Le montant des intérêts payés

Le montant des intérêts payés après le versement des p premières annuités est égal au montant Ip tel que:

$$I_k = \sum_{p=1}^{k} I_p$$

3.4- Le coût total de l'emprunt

Le coût total de l'emprunt est égal à la somme de tout les intérêts versés.

$$I = \sum_{p=1}^{n} I_p$$

Chapitre 6 : Les emprunts indivis

3- Quelques propriétés d'un emprunt indivis

3.4- Le dernier amortissement et la dernière annuité

Le dernier amortissement et la dernière annuité sont liés entre eux par une relation:

$$a_n = m_n + (c_{n-1} * i)$$

4- Remboursement in fine

Définition :

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt.

Les caractéristiques de cette emprunt sont:

- **Le capital emprunté Co est remboursé a la fin de la dernière période.**
- **Le capital restant dû en début de période étant le même (Co) l'intérêt payé a chaque période est une constante.**
- **Toutes les annuités sont constantes et égales au montant de l'intérêt sauf la dernière qui incorpore en plus l'intérêt de la dernière période, le montant du remboursement total du Capital emprunté (Co).**

4- Remboursement in fine

Tableau d'amortissement

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_0.i$	---	$a_1 = I_1 = I$
2	C_0	$I_2 = I = C_0.i$	---	$a_2 = I_2 = I$
p	C_0	$I_p = I = C_0.i$	---	$a_p = I_p = I$
n-1	C_0	$I_{n-1} = I = C_0.i$	---	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	C_0	$I_n = I = C_0.i$	C_0	$a_n = I_n + C_0 = I + C_0$

4- Remboursement in fine

Application:

C_0= 100 000
i = 6%
n = 4 ans

Périodes	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuités
1	100 000	6000	-	6000
2	100 000	6000	-	6000
3	100 000	6000	-	6000
4	100 000	6000	100 000	106 000

5- Remboursement par amortissements constants

Définition :

Il s'agit d'emprunt dont les remboursements se font par amortissements constants ou encore par série égale.

Les caractéristiques générales sont :

- **A la fin de chaque période on rembourse une part constante du capital emprunté. Cette part est égale au capital emprunté divisé par le nombre de périodes de remboursement.**
- **Le capital restant dû et les intérêts à payer diminuent régulièrement.**
- **Les annuités de remboursement sont la somme des k remboursements et les intérêts payés.**

Tableau d'amortissement :

Si le capital emprunté est Co et N le nombre de périodes, l'amortissement constant m est donné par la formule suivante :

$$\boxed{m = \frac{C_0}{N}}$$

5- Remboursement par amortissements constants

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m	$a = I_1 + m$
2	$C_1 = C_0 - m$	$I_2 = C_1 . i$	m	$a = I_2 + m$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m$	$I_p = C_{p-1} . i$	m	$a = I_p + m$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m	$a = I_{n-1} + m$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m$	$I_n = C_{n-1} . i$	m	$a = I_n + m$

Application:

C_0= 100 000; i = 6% ; n = 4 ans

Périodes	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuités
1	100 000	6000	25 000	31 000
2	75 000	4500	25 000	29 500
3	50 000	3000	25 000	28 000
4	25 000	1500	25 000	26 500

6- Remboursement par annuités constantes

Définition :

Il s'agit d'un emprunt remboursé par annuités constantes dont les caractéristiques sont les suivantes :

- **L'annuité de remboursement de fin de chaque période composée des intérêts et d'une fraction du capital amorti est une constante.**
- **Le capital remboursé à la fin de chaque période est égale à la différence entre l'annuité de remboursement et l'intérêt périodique.**
- **L'intérêt périodique est obtenu par multiplication du capital restant dû et le taux d'intérêt.**
- **Le montant de l'intérêt périodique diminue au cours du temps.**
- **L'annuité de remboursement est obtenue a partir de la relation donnant la valeur actuelle d'une suite de flux constants versés en fin de période pendant N périodes au taux i.**

***Rappel des annuités constantes**: (voir fiche: 7)*

$$C_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{C_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

6- Remboursement par annuités constantes

Tableau d'amortissement:

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m_1	$a = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 . i$	m_2	$a = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} . i$	m_p	$a = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m_{n-1}	$a = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} . i$	m_n	$a = I_n + m_n$

6- Remboursement par annuités constantes

Application:

C_0= 100 000 Dh; i = 6% ; n = 4 ans

$$a = \frac{C_0 . i}{1-(1+i)^{-n}}$$ → **a = 28 859.15**

Périodes	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuités
1	100 000	6000	22 859.15	28 859.15
2	77 140.85	4628.45	24 230.7	28 859.15
3	52 910.15	3174.6	25 684.54	28 859.15
4	27 225.61	1633.53	27 225.61	28 859.15

Application:

Un emprunt de 600 000Dh est remboursable au moyen de deux versements annuels à échéances respectives de 1 an et 2 ans, et dont les montants sont dans l'ordre, 300 000 Dh et 393 453.75Dh.

Travail à faire:

Présenter le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Solution:

Nous cherchons le taux d'emprunt i

Nous pouvons écrire

$600\ 000\ (1+i)^2 = 300\ 000\ (1+i) + 393\ 453.75$

Posons (1+i) = x. on obtient alors, après simplifications et transformations.

$2x^2 - x - 1.3115125 = 0$

Équation du second degré dont on ne retient que la racine positive.

$x = 1.0975 = 1+i$ soit $i = 0.0975$

Périodes	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuités
1	600 000	58 500	241 500	300 000
2	358 500	34 953.75	358 000	393 453.75
Total			600 000	

Application:

Une entreprise désire réaliser un investissement de 800 000 Dh. Pour financer son projet, l'entreprise fait appel à un emprunt bancaire (emprunt indivis). La banque lui propose trois modalités au taux annuel de 8%, pour une durée de 4 ans :

- ❑ **Première modalité: Remboursement in fine.**
- ❑ **Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.**
- ❑ **Troisième modalité: Remboursement par annuités constantes.**

Travail à faire:

1. **Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.**
2. **Quelle modalité choisir si l'objectif de l'entreprise est de payer le moins d'intérêts possible ?**

Chapitre 7 : Les emprunts obligataire

1-Définition

L'obligation est une valeur mobilière de placement représentant un droit de créance. Le détenteur des obligations (obligataires) recevra en contrepartie du montant investi des coupons (intérêt) à la fin de chaque et il sera remboursé en fonction des termes du contrat.
Si dans les emprunts indivis, le montant de dette est contacté par un seul investisseur ; pour le cas des emprunts obligataires, la dette est fractionnée et détenue par plusieurs investisseurs.

2- Caractéristiques des obligations

- ❑ **La valeur nominale** : c'est le montant que doit payer l'investisseur pour la souscription d'une obligation (valeur faciale de l'obligation). Elle sert de base au calcul des intérêts.

  Montant de l'emprunt = Nombre d'obligations * Valeur nominale
- ❑ **Le taux d'intérêt** : Il permet de calculer les intérêts à verser périodiquement à l'investisseur (coupons). Il est appelé aussi le taux nominal ou le taux facial.
- ❑ **Le coupon** : il représente l'intérêt. Il est calculé en appliquant le taux d'intérêt à la valeur nominale

  Coupon = la valeur nominale * taux d'intérêt

Chapitre 7 : Les emprunts obligataire

2- Caractéristiques des obligations

Une obligation qui ne donne pas de coupon est appelée zéro-coupon. Seul le nominal est payé à l'échéance. Généralement, les obligations à courts terme (moins d'un an) sont des zéro-coupon.

❑**Date de jouissance** : date à partir de laquelle les intérêts seront calculés.

❑**Prix d'émission** : c'est le prix de souscription d'obligation. Il peut être différent du nominal.

Si le prix d'émission est égal à la valeur nominale, on parle d'une émission au pair.

Si le prix d'émission est inférieur à la valeur nominale, on parle d'une émission avec prime

Prime d'émission = valeur nominale – prix d'émission

On réduit le prix d'émission dans le but d'encourager les investisseurs à souscrire les obligations.

❑**La durée de vie** : c'est la durée de l'obligation.

❑**Prix de remboursement** : prix auquel l'obligation sera remboursée à l'échéance. Si le prix de remboursement est égal au nominal, on dira que l'obligation est remboursée au pair

❑**Prime de remboursement** : c'est la différence entre le nominal et le prix de remboursement.

Prime de remboursement = Valeur nominale – prix de remboursement

3- Tableau d'amortissement de l'emprunt obligataire

On suppose les notations suivantes :

C_0 : le montant de l'emprunt;

N_0: nombre d'obligations émises;

N_1, N_2,…., N_n : le nombre d'obligations non encore remboursées (vivantes) à la fin de la $1^{ère}$, $2^{ème}$, …., dernière année;

V: la valeur nominale de l'obligation ($V * N_0 = C_0$);

E: le prix d'émission ($PE \leq V$);

R: le prix de remboursement ($PR \geq V$);

Pr: la prime de remboursement ($Pr = R - E$)

M_1 , M_2,…, M_n : les amortissements en valeurs;

m_1 , m_2 , …, m_n : les amortissements en nombre d'obligations

a_1 , a_2 , …, a_n : les annuités de remboursement

Le tableau d'amortissement sera établi comme suit :

Période	Nombre d'obligations		Intérêt (coupon)	Amortissement	Annuité
	Vivantes	Amortis			
K	N_{K-1}	m_k	$I = N_{K-1} * (V * taux)$	M_K	$a_K = I + M_K$

4- Emprunts remboursables par amortissements constants

Pour chaque période, on rembourse un nombre égal d'obligations :

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_k = \cdots = m_n$$

$$\textit{Nombre d'obligations amortis périodiquement} = m_k = \frac{N_0}{Durée}$$

Exemple

Une entreprise lance un emprunt obligataire aux conditions financières suivantes :
Nombre d'obligations émises………………………….100 000 ;
Valeur nominale……………………………………….100 dh ;
Prix d'émission…………………………………………100 dh ;
Taux d'intérêt……………………………………………10% ;
Durée d'emprunt…………………………………………5 ans ;

Résolution

$$\textit{Nombre d'obligations amortis périodiquement} = \frac{100\,000}{5\ ans} = 20\,000\ obligations$$

4- Emprunts remboursables par amortissements constants

Résolution

	Nombre d'obligations		Intérêt (coupon)	Amortissement	Annuité
	Vivantes	Amortis			
1	N_0=100 000	m_1=20 000	100 000 x 100 x 0,1= 1 000 000	M_1=20 000* 100= 2 000 000	a_1=1 000 000+ 2 000 000 = 3 000 000
2	N_1=100000-20000= 80000	m_2=20 000	80 000 x 100 x 0,1= 800 000	M_2=2 000 000	a_2=800000+ 2000000=2800000
3	60 000	m_3=20 000	60 000 x 100 x 0,1= 600 000	M_3=2 000 000	a_3=600000+ 2000000=2600000
4	40 000	m_4=20 000	40 000 x 100 x 0,1= 400 000	M_4=2 000 000	A_4=400000+ 2000000=2400000
5	20 000	m_5=20 000	20 000 x 100 x 0,1= 200 000	M_5=2 000 000	A_5=200000+ 2000000=2200000

5- Emprunts remboursables par Anuitées constantes

Formules fondamentales

Pour établir le tableau d'amortissement, nous exploitons les formules déjà utilisées dans le cas des emprunts indivis

- ❑ Les annuités de l'emprunt indivis sont calculées comme suit :

$$a = C_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Sachant que : $C_0 = N_0 x\, V$, on obtient alors la formule de calcul des annuités de l'emprunt obligataire :

$$a = N_0 * V \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

- ❑ En cas d'emprunt indivis, Le premier amortissement est calculé en appliquant la formule suivant :

$$M_1 = C_0 \frac{i}{(1+i)^{n}-1}$$

5- Emprunts remboursables par Anuitées constantes

Formules fondamentales

M_1 : Montant de premier amortissement, il est égal $M_1 = m_k x\ R$

On remplace dans la formule, obtient :

$$m_k * R = N_0 * V \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Si l'emprunt est au pair (V= R), on déduit alors :

$$m_k = N_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

- ❑ Dans le cadre des emprunts indivis, les amortissements successifs forment une suite géométrique croissante de raison (1+i)

$$M_{k+1} = M_k (1+i)$$

Avec M_k: L'amortissement en valeur, $M_k = m_k * R$

$(m_k$: *le nombre d'obligations à amortir et* R: *prix de remboursement*$)$

$$M_{k+1} = M_k (1+i) \longrightarrow m_{k+1} * R = m_k * R * (1+i)$$

On obtient la nouvelle loi d'amortissement :

$$\boxed{m_{k+1} = m_k (1+i)}$$

5- Emprunts remboursables par Anuitées constantes

Applications

Exemple (1) : *Emission au pair (Valeur nominale = prix de remboursement)*

Une entreprise décide de lancer un emprunt obligataire sur le marché financier aux caractéristiques suivantes :

Nombre d'obligations émis……………………………………500 obligations
Valeur nominale ………………………………………………….2 000 dh
Prix de remboursement……………………………………….....2 000 dh
Taux d'intérêt……………………………………………………….8%
Durée d'emprunt……………………………………………………5 ans
Mode de remboursement………………………………au pair par annuités constantes.
Etablir le tableau d'amortissement de cet emprunt

Résolution

Calcul des obligations amorties

5- Emprunts remboursables par Anuitées constantes

Applications

Résolution

Calcul des obligations amorties

	Amortissement calculé	*Amortissement réel*
1	$m_1 = N_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \quad 500 \frac{0{,}08}{(1{,}08)^5 - 1} = 85{,}22$	*85*
2	$m_2 = m_1 (1+i) = 85{,}22 \, x \, 1{,}08 = 92{,}03$	*92*
3	$m_3 = m_2 (1+i) = 92{,}03 \, x \, 1{,}08 = 99{,}39$	*100*
4	$m_4 = m_3 (1+i) = 99{,}39 \, x \, 1{,}08 = 107{,}34$	*107*
5	$m_5 = m_4 (1+i) = 107{,}34 \, x \, 1{,}08 = 115{,}92$	*116*
	Total	*500*

5- Emprunts remboursables par Anuitées constantes

Applications

Résolution

Tableau d'amortissement

	Nombre d'obligations		Coupon	Amortissement	Annuité
	Vivantes	amorties			
1	500	85	500 x 2 000 x 0,08 = 80 000	85 x 2 000 = 170 000	250 000
2	415	92	66 400	184 000	250 400
3	323	100	51 680	200 000	251 680
4	223	107	35 680	214 000	249 680
5	116	116	18 560	232 000	250 560

5- Emprunts remboursables par Anuitées constantes

Applications

Exemple (2) : *Emission avec prime de remboursement (Prix de remboursement>Valeur nominale)*

Une entreprise décide de lancer un emprunt obligataire sur le marché financier aux caractéristiques suivantes :

Nombre d'obligations émis………………………………….100 000 obligations

Valeur nominale ……………………………………………… 600 dh

Prix remboursement……………………………………………. .650 dh

Taux d'intérêt……………………………………………………. 10%

Durée d'emprunt………………………………………………… 5 ans

Mode de remboursement……………………………… annuités sensiblement constantes.

Etablir le tableau d'amortissement de cet emprunt

Pour simplifier l'établissement de ce tableau, nous devons calculer un nouveau taux (r)

$$r = \frac{V \times i}{R} = \frac{600 \times 0{,}1}{650} = 0{,}0923$$

Chapitre 7 : Les emprunts obligataire

5- Emprunts remboursables par Anuitées constantes

Applications

Pour simplifier l'établissement de ce tableau, nous devons calculer un nouveau taux (r)

$$r = \frac{V\ x\ i}{R} = \frac{600\ x\ 0{,}1}{650} = 0{,}0923$$

Calcul des obligations amortis

	Amortissement calculé	Amortissement réel
1	$m_1 = N_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 100\ 000 \frac{0{,}0923}{(1{,}0923)^5 - 1} = 16\ 632{,}86$	16 633
2	$m_2 = m_1 (1+i) = 16\ 632{,}82\ x\ 1{,}0923 = 18\ 168{,}072$	18 168
3	$m_3 = m_2 (1+i) = 18\ 168{,}072\ x\ 1{,}0923 = 19\ 844{,}985$	19 845
4	$m_4 = m_3 (1+i) = 19\ 844{,}985\ x\ 1{,}0923 = 21\ 676{,}677$	21 677
5	$m_5 = m_4 (1+i) = 21\ 676{,}677\ x\ 1{,}0923 = 23\ 677{,}434$	23 677
	Total	100 000

5- Emprunts remboursables par Anuitées constantes

Applications

Tableau d'amortissement

	Nombre d'obligations		Coupon	Amortissement	Annuité
	Vivantes	amorties			
1	100 000	16 633	100 000 x 600 x 0,1 = 6 000 000	16 633 x 650 = 10 811 450	16 811 450
2	83 367	18 168	5 002 020	11 809 200	16 811 220
3	65 199	19 845	3 911 940	12 899 250	16 811 190
4	45 354	21 677	2 721 240	14 090 050	16 811 290
5	23 677	23 677	1 420 620	15 390 050	16 810 670

Merci pour votre attention