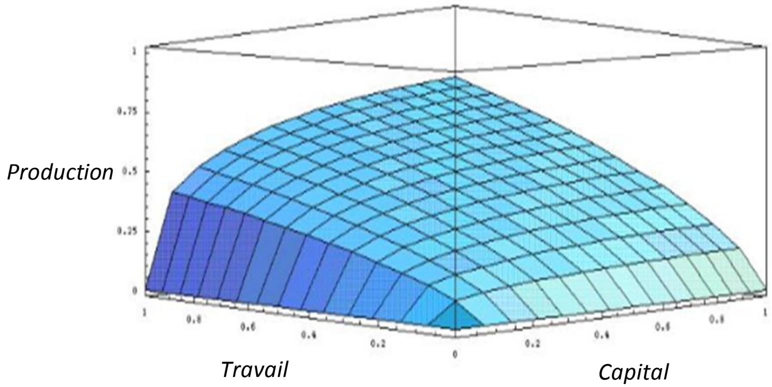
Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences Juridiques , Economiques et Sociales de Tanger
Filière Management des Ressources Humaines
Filière Comptabilité, Finance et Fiscalité (Groupe C)

Mathématiques



Pr. Soumaya FELLAJI
Enseignante Chercheuse à la FSJES-Tanger
Equipe de Recherche en Management et Dynamique des Organisations (EReMDO)

Année Universitaire : 2023-2024

Mathématiques

1	**Calcul matriciel**
2	**Fonctions numériques d'une variable réelle**
3	**Fonctions réelles à deux variables**

À quoi servent les mathématiques?

Introduction

- Un modèle mathématique est nécessaire pour raisonner rigoureusement;
- Les variables économiques dépendent les unes des autres;
- Les données économiques sont souvent quantitatives.

$\Downarrow$

Nécessité de connaître la théorie mathématique des fonctions.

1 Calcul matriciel

1 Calcul matriciel

❑ Matrices

Définition 1

- On appelle matrice de type $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ un tableau à $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{p}$ colonnes, comportant $\boldsymbol{np}$ nombres réels. Une matrice $\boldsymbol{A}$ sera notée :

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} == \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ & & a_{ij} & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- Si la matrice comporte une seule colonne $(\boldsymbol{p} = \mathbf{1})$, on dit que c'est une **matrice-colonne** ou un **vecteur-colonne**.
- Si la matrice comporte une seule ligne $(\boldsymbol{n} = \mathbf{1})$, on dit que c'est une **matrice-ligne** ou un **vecteur-ligne**.

❑ Matrices

Définitions 2

1) Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$. $\boldsymbol{A}$ est appelée matrice carrée lorsque $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}$. On appelle termes diagonaux de $\boldsymbol{A}$ les coefficients $\boldsymbol{a_{i;j}}$, $i=1,\dots,n$.
2) $\boldsymbol{A}$ est ***diagonale*** lorsque tous les termes non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire si $\boldsymbol{a_{i;j}}=\boldsymbol{0}$ dès que $i\neq j$.
3) $\boldsymbol{A}$ est ***triangulaire inférieure*** si tous les termes situés au-dessus de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire si $\boldsymbol{a_{i;j}}=\boldsymbol{0}$ pour $i<j$.
4) $\boldsymbol{A}$ est ***triangulaire supérieure*** si tous les termes situés au-dessous de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire si $\boldsymbol{a_{i;j}}=\boldsymbol{0}$ pour $i>j$.
5) Une matrice $\boldsymbol{A}$ est appelée ***matrice nulle*** si tous les termes $\boldsymbol{a_{i;j}}$ sont égaux à 0.

Matrices

Opérations élémentaires sur les matrices

Transposition

- Notons $\mathcal{M}_{n,p}$ l'ensemble des matrices à $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{p}$ colonnes.

Définition

- Soit $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{n,p}$. On appelle ***matrice transposée*** de $\boldsymbol{A}$ et on note $\boldsymbol{A'}$ (ou $\boldsymbol{A^T}$) la matrice déduite de $\boldsymbol{A}$ en échangeant lignes et colonnes.

Exemple

Soit $\boldsymbol{A}$ définie par :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice transposée de $\boldsymbol{A}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices

Opérations élémentaires sur les matrices

Addition de matrices

- Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}$. La matrice $A + B$, addition de A et B, est définie par $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, c'est-à-dire :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{bmatrix}$$

Exemple

Soient A et B définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

La matrice $A + B$ est donnée par :

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 - 2 & 4 + 0 \\ 2 + 6 & 7 - 1 \\ 9 + 3 & 1 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Matrices

Opérations élémentaires sur les matrices

Multiplication d'une matrice par un nombre réel

- Soit $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ et $\beta \epsilon \mathbb{R}$. On note $\beta \boldsymbol{A}$ la matrice obtenue en multipliant chaque terme de $\boldsymbol{A}$ par le réel β, c'est-à-dire :

$$\beta \boldsymbol{A} = \beta \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{np}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \beta \boldsymbol{a_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta \boldsymbol{a_{n1}} & \cdots & \beta \boldsymbol{a_{np}} \end{bmatrix}$$

Exemple

Soient $\boldsymbol{A}$ une matrice un scalaire $\beta = 2$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{9} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

La matrice $2\boldsymbol{A}$ est donnée par :

$$\mathbf{2}\boldsymbol{A} = \mathbf{2} \times \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{9} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{14} \\ \mathbf{18} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Matrices

Opérations élémentaires sur les matrices

Produit matriciel

- Soient $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{n,p}}$ et $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}}) \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{p,m}}$. On appelle produit de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, et on note $\boldsymbol{C}$, est une matrice à $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{m}$ colonnes dont le terme général $\boldsymbol{c_{ij}}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}$$

Exemple

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices définies par : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

La matrice $\boldsymbol{AB}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 2 + 4 \times 1 \\ 2 \times 2 + 7 \times 1 \\ 9 \times 2 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Matrices

Opérations élémentaires sur les matrices

Matrices carrées et inversion de matrices

- On note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})$.
- On appelle matrice identité l'élément de $\mathcal{M}_n$ dont les seuls éléments non nuls sont les éléments diagonaux qui sont égaux à $\mathbf{1}$. Cette matrice est notée $\boldsymbol{I_n}$.
- Une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n$ est dite inversible s'il existe une matrice $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n$ telle que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I_n}$. $\boldsymbol{B}$ est alors appelée matrice inverse de $\boldsymbol{A}$ et notée $\boldsymbol{A^{-1}}$.
- Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$, on a $\{\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\}$.
- Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$, on a $\{\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{CA} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\}$.
- Si deux matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ de $\mathcal{M}_n$ sont inversibles, le produit $\boldsymbol{AB}$ est inversible et :

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$$

❑ Matrices

Matrices élémentaires

- Les matrices élémentaires sont des éléments de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n}}$ qui, multipliés par une matrice $\boldsymbol{A}$ de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n}}$, permettent les opérations suivantes :
  - Permuter deux lignes ou deux colonnes de $\boldsymbol{A}$;
  - Multiplier une ligne ou une colonne de $\boldsymbol{A}$ par un nombre réel $\boldsymbol{c}$;
  - Ajouter à une ligne (colonne) de $\boldsymbol{A}$ une autre ligne (colonne) de $\boldsymbol{A}$ multipliée par une constante.

Matrices

Matrices élémentaires

Permuter deux lignes ou deux colonnes

- Soit la matrice $\mathbf{\Pi_{12}}$ définie par : $$\Pi_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Cette matrice est obtenue en permettant les deux premières colonnes de la matrice identité $\boldsymbol{I_3}$. Pour une matrice $\boldsymbol{A}$ quelconque, calculons les produits $\boldsymbol{\Pi_{12}A}$ et $\boldsymbol{A\Pi_{12}}$:

$$\Pi_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A\Pi_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{\Pi_{12}A}$ est déduite de la matrice $\boldsymbol{A}$ en permutant les lignes 1 et 2.
- $\boldsymbol{A\Pi_{12}}$ est déduite de la matrice $\boldsymbol{A}$ en permettant les colonnes 1 et 2.

❑ Matrices

Matrices élémentaires

Multiplier une ligne ou une colonne par une constante

- Soit la matrice $\boldsymbol{I_1(c)}$ définie par : $$I_1(c)=\begin{bmatrix} c & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
- Cette matrice est déduite de la matrice identité en multipliant le premier terme diagonale par une constante $\boldsymbol{c}$. Calculons les produits $\boldsymbol{I_1(c)A}$ et $\boldsymbol{AI_1(c)}$:

$$I_1(c)A=\begin{bmatrix} c & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$AI_1(c)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ca_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ca_{21} & a_{22} & a_{23}\\ ca_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{I_k(c)A}$ est la multiplication de la k-ième ligne de la matrice $\boldsymbol{A}$ par la constante $\boldsymbol{c}$.
- $\boldsymbol{AI_k(c)}$ est la multiplication de la k-ième colonne de la matrice $\boldsymbol{A}$ par la constante $\boldsymbol{c}$.

Matrices

Matrices élémentaires

combiner deux lignes ou deux colonnes

- Soit la matrice $\boldsymbol{I}_{13}(\boldsymbol{c})$ définie par : $$\boldsymbol{I}_{13}(\boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Cette matrice est déduite de la matrice identité en ajoutant la constante $\boldsymbol{c}$ au terme situé sur la 1ère ligne et la 3ème colonne. Calculons les produits $\boldsymbol{I}_{13}(\boldsymbol{c})\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{13}(\boldsymbol{c})$:

$$\boldsymbol{I}_{13}(\boldsymbol{c})\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + ca_{31} & a_{12} + ca_{32} & a_{13} + ca_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{13}(\boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ca_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ca_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ca_{31} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{I}_{\mathrm{ik}}(\boldsymbol{c})\boldsymbol{A}$ ajoute $\boldsymbol{c}$ fois la k-ième ligne à la i-ième ligne de la matrice $\boldsymbol{A}$.
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\mathrm{ik}}(\boldsymbol{c})$ ajoute $\boldsymbol{c}$ fois la i-ième colonne à la k-ième colonne de la matrice $\boldsymbol{A}$.

❑ Matrices

Matrices élémentaires

Concaténation de deux matrices

1) Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices à $\boldsymbol{n}$ lignes, comptant respectivement $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{m}$ colonnes.

On appelle matrice concaténée de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, la matrice $\boldsymbol{C}$, notée $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$ de dimension $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}+\boldsymbol{p})$.

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Déterminants

Cas d'une matrice (2,2)

Définition

- Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice (2,2) de terme général $\boldsymbol{a_{ij}, i, j = 1, 2}$. On appelle déterminant de $\boldsymbol{A}$ et on note $\boldsymbol{det(A)}$ la quantité :

$$\boldsymbol{det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Exemple

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice : $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}}$

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4 \times 5 - 3 \times 6 = 20 - 18 = 2$$

Déterminants

Cas général

Définition

1) Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice (n, n). $\boldsymbol{D_{ij}}$ est le déterminant de la matrice déduite de $\boldsymbol{A}$ en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de $\boldsymbol{A}$. On appelle (i, j)-ième cofacteur de $\boldsymbol{A}$ la quantité $\boldsymbol{C_{ij}} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{D_{ij}}$.

2) Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice (n, n). On appelle i-ième mineur principal de $\boldsymbol{A}$ le déterminant de la matrice $(n-i, n-i)$ obtenue en supprimant les dernières lignes et colonnes de $\boldsymbol{A}$.

3) Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice (n, n). On appelle ***déterminant*** de $\boldsymbol{A}$ la quantité :

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}}\boldsymbol{C_{ij}}$$

Déterminants

Cas général

Exemple

Soit $\boldsymbol{A}$ définie par : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$

$$det(A) = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 3 \times (4 \times 4 - 2 \times 6) - 1 \times (1 \times 4 - 2 \times 2) + 2 \times (1 \times 6 - 2 \times 4)$$

$$det(A) = 8$$

Dans ce cas, on dit qu'on développe le déterminant selon la première ligne de $\boldsymbol{A}$.

On obtient le même résultat en développant selon la deuxième ligne de $\boldsymbol{A}$.

Déterminants

Cas général

Propositions

1) Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices (n, n). On a alors :

$$\boldsymbol{det(AB) = det(A)det(B)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{det(A^T) = det(A)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}}$$

2) Soient $\boldsymbol{A}$ une matrice (n, n) et $\boldsymbol{B}$ une matrice déduite de $\boldsymbol{A}$ en intervertissant deux lignes ou deux colonnes. On a alors :

$$\boldsymbol{det(B) = -det(A)}$$

3) Une matrice $\boldsymbol{A}$ de dimensions (n, n) est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Si tel est le cas, la matrice inverse $\boldsymbol{A^{-1}}$ est définie par :

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^T}$$

Où $C = (C_{ij}, i, j = 1, \ldots, n)$ est la matrice des cofacteurs de $\boldsymbol{A}$.

Systèmes d'équations linéaires

Définition

- On appelle système de $\boldsymbol{n}$ équations linéaires à $\boldsymbol{p}$ inconnues $(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2},\ldots,\ \boldsymbol{x_p})$ le système :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- Ecriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_{np}X_p = B_n$$

Systèmes d'équations linéaires

Définitions

- Le système (S) est dit :
  - **Carré** lorsque $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}$.
  - **De Cramer** lorsqu'il est carré et que $\boldsymbol{A}$ est inversible.
  - **Homogène** lorsque $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.
  - **Impossible** lorsqu'il ne possède pas de solution.
  - **Indéterminé** lorsqu'il possède plusieurs solutions.

Proposition

- Tout système homogène possède une solution.
- Tout système de Cramer possède une solution unique.

Systèmes d'équations linéaires

Méthodes de résolution

Résolution par substitution

- Soit le système linéaire : $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 12 \\ 4x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$
- La méthode de résolution par substitution consiste à exprimer une variable en fonction de l'autre dans une équation et à opérer le remplacement dans la seconde équation :

$$x_2 = 12 - 3x_1$$

- En remplaçant par son expression dans la seconde égalité, on aboutit à :

$$4x_1 + 2 \times (12 - 3x_1) = 18 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$

- On en déduit alors :

$$x_2 = 12 - 3 \times 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

- Cette méthode est lourde à appliquer lorsqu'il y a plusieurs variables et équations.

Systèmes d'équations linéaires

Méthodes de résolution

Méthode de Gauss

- Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 & (L_1) \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 & (L_2) \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 31 & (L_3) \end{cases}$$

- Élimination de x_1 dans (L_2) et (L_3) puis élimination de x_2 dans (L_3) :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 & (L_1) \\ x_2 + 4x_3 = 37 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 5x_2 + 18x_3 = 169 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 4(L_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 & (L_1) \\ x_2 + 4x_3 = 37 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 2x_3 = 16 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 5(L_2) \end{cases}$$

- D'où :

De : (L_3) : $x_3 = 8$

Puis de : (L_2) : $x_2 = 37 - 4 \times 8 = 5$

Enfin de : (L_1) : $x_1 = 50 - 3 \times 5 - 4 \times 8 = 3$

2 Fonctions numériques d’une variable réelle

Qu’est-ce qu’une fonction?

2 Fonctions numériques d'une variable réelle

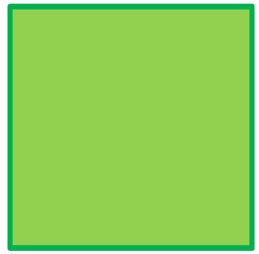
❑ Généralités

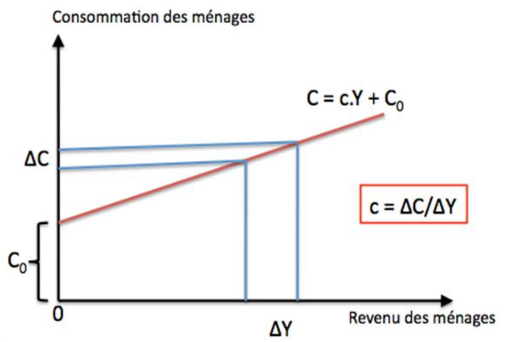
Sortir avec un parapluie?

Cela dépend des prévisions de Météo.

Calculer la surface d'un carré.

Elle dépend de son côté.





Prédire la consommation d'une personne.

Elle dépend de son revenu (modèle keynésien).

2 Fonctions numériques d'une variable réelle

❑ Généralités

Définition

On dit que "f" est une fonction numérique d'une variable réelle s'il existe un sous-ensemble **I** de $\mathbb{R}$ tel que chaque nombre $x \in \mathbf{I}$ possède une unique image $f(x)$ qui est un nombre réel.

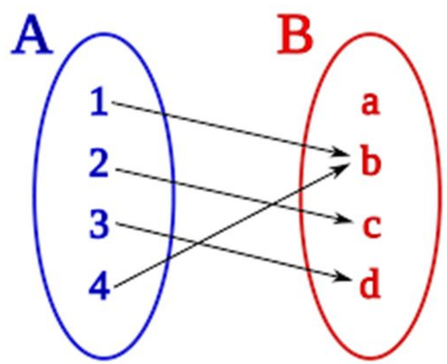
Notation

Domaine de définition de f, noté D_f

$$f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$

Antécédent

Image de x par f



Généralités

Remarques

- Dès que l'on considère f sur I, on peut dire également que f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

- L'ensemble des images de x par f se note $Im(f)$ et s'écrit :

$$Im(f) = \{ f(x) \mid x \in I \} \subset \mathbb{R}$$

- Le domaine de définition d'une fonction réelle peut être défini par un intervalle, union d'intervalles ou par l'ensemble $\mathbb{R}$.

Généralités

Exemples

- Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \sqrt{x} \qquad f_2(x) = \sqrt{4 - x}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \qquad f_4(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|+5}}$$

❑ Généralités

Réponses

1) $D_{f1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

2) $D_{f2} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x \geq 0\}$

$D_{f2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\} =]-\infty, 4]$

3) $D_{f3} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x-3) \neq 0\}$

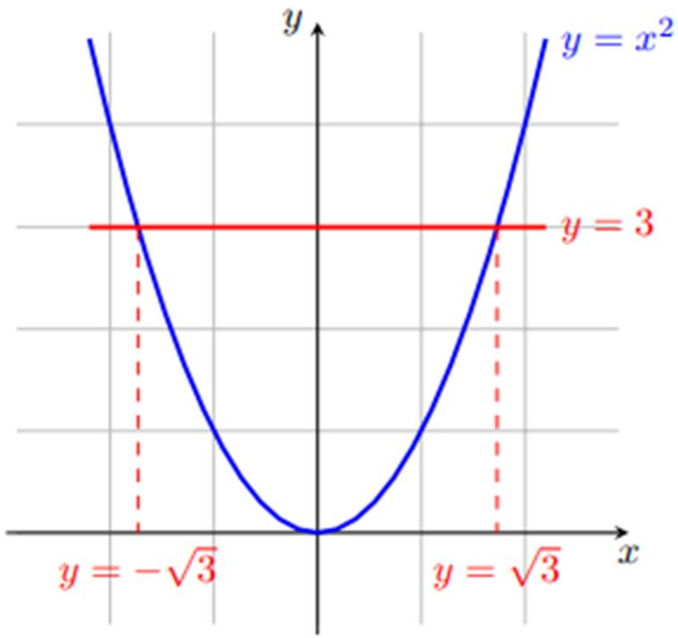
$D_{f3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \; et \; x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{2,3\}$

4) $D_{f4} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 0 \;\; et \; |x| + 5 > 0\} = \mathbb{R}$

Généralités

Graphe d'une fonction numérique

- On sait que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être représenté par une droite.
- L'axe des abscisses (droite horizontale) représente $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ.
- L'axe des ordonnées (droite verticale) représente $\mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée.



Généralités

Graphe d'une fonction numérique

- Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble D_f.
- On appelle **graphe de *f*** (ou **courbe représentative de *f***) l'ensemble des points **M(*x*, *f*(*x*))** du plan dont l'abscisse ***x*** est un élément de D_f et l'ordonnée est l'image ***f*(*x*)** de ***x*** par ***f***. Il est noté $\boldsymbol{C_f}$:

$$\boldsymbol{C_f} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in D_f\}$$

- L'équation ***y* = *f*(*x*)** est appelée **équation cartésienne** du graphe (ou de **la courbe représentative**) de ***f***.

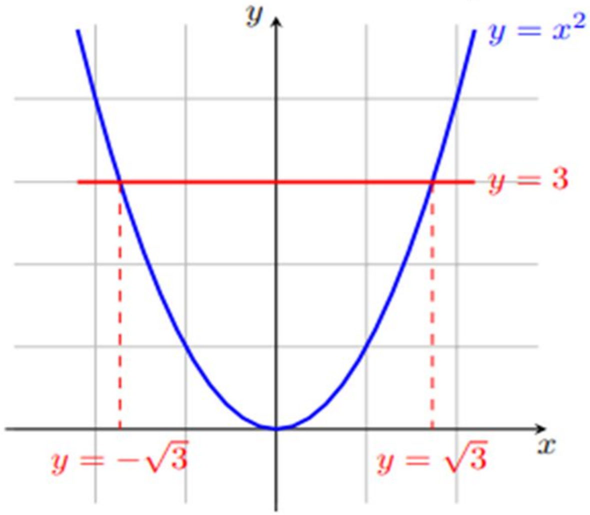
❑ Généralités

Graphe d'une fonction numérique

Remarques

- On peut facilement lire l'image d'un réel ainsi que ses antécédents à partir du graphe de la fonction.

  En particulier, le(s) antécédent(s) d'un réel z par f sont les abscisses des points d'intersection de la droite y = z avec le graphe de f qui a pour équation y = f(x)



- Un coup d'œil à la courbe permet souvent de comprendre quelles sont les propriétés de la fonction ***f***.

Généralités

Opérations sur les fonctions

- Soient $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques définies sur le même ensemble **I**. Alors :

- La somme de $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ est la fonction $\boldsymbol{f+g} : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall\, x \in I$$

Exemple

$$f : x \to 2x + 15 \qquad\qquad g : y \to y + 1$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 15 + x + 1 = 3x + 16$$

Généralités

Opérations sur les fonctions

- Soient $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques définies sur le même ensemble **I**. et λ un nombre réel. Alors :

- Le produit de f et g est la fonction $f \times g : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \qquad \forall\, x \in I$$

Exemple

$$f : x \to 2x + 15 \qquad\qquad g : y \to y^2$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (2x + 15)\, x^2 = 2x^3 + 15\, x^2$$

Généralités

Opérations sur les fonctions

- Soient $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques définies sur le même ensemble **I**. et λ un nombre réel. Alors :

- La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la fonction $\lambda \boldsymbol{f} : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ définie par : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in I$

Exemple

$$f : x \to 2x + 15$$

$$(5f)(x) = 5f(x) = 5(2x + 15) = 10x + 75$$

Généralités

Composition

- Soient $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \boldsymbol{f}(\mathbf{I}) \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques.

- La fonction composée notée ***gof*** est la fonction définie par :

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall\, x \in D_{g\circ f}$$

Exemple

$$f\ : x\ \to 2x + 15 \qquad\qquad g\ : y\ \to y^2$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 15)^2 = 4x^2 + 60\,x + 225$$

Généralités

Fonctions majorées, minorées, bornées

- Soit f : **I** → $\mathbb{R}$ une fonction numérique.
- La fonction f est majorée sur **I** s'il existe un réel **M** tel que :

$$\forall\, x \in I \quad f(x) \leq M$$

- La fonction f est minorée sur **I** s'il existe un réel **m** tel que :

$$\forall\, x \in I \quad f(x) \geq m$$

- La fonction f est bornée sur **I** si elle est à la fois majorée et minorée sur **I** :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R} \;/\; \forall\, x \in I \quad m \leq f(x) \leq M$$

Généralités

Fonctions croissantes, décroissantes

- Soit $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
- f est **croissante** sur **I** : $\forall\, x, y \in I \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f est **strictement croissante** sur **I** : $\forall\, x, y \in I \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
- f est **décroissante** sur **I** : $\forall\, x, y \in I \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f est **strictement décroissante** sur **I** : $\forall\, x, y \in I \quad x < y \implies f(x) > f(y)$
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur **I** si f est une fonction croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur **I**.

Généralités

Fonctions croissantes, décroissantes

- Pour étudier la croissance ou la décroissance de la fonction f, on introduit le rapport (appelé taux d’accroissement de f) :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \quad où \quad x \neq y$$

- f est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur **I**, si est seulement si :

$$\forall\, x \in I \text{ et } y \in I, \quad x \neq y \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0 \ \ (resp. \ > 0)$$

Généralités

Fonctions croissantes, décroissantes

Propriétés 1

- La somme de deux fonctions croissantes sur **I** est croissante sur **I**.
- La somme de deux fonctions décroissantes sur **I** est décroissante sur **I**.

Exemple

Etudier la monotonie de la somme des fonctions f et g définies par :

$$f : x \rightarrow 2x + 15 \qquad\qquad g : y \rightarrow y + 1$$

Généralités

Fonctions croissantes, décroissantes

Solution

$$f : x \to 2x + 15 \;; \qquad D_f = \mathbb{R}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$x \leq y \Longrightarrow 2x \leq 2y$$

$$\Longrightarrow 2x + 15 \leq 2y + 15$$

$$\Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Donc : f est croissante.

$$g : y \to y + 1 \;; \qquad D_g = \mathbb{R}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$x \leq y \Longrightarrow x + 1 \leq y + 1$$

$$\Longrightarrow g(x) \leq g(y)$$

Donc : g est croissante.

*Or, la somme de deux fonctions croissantes sur **I** est croissante sur **I**.*

Ainsi, la somme des deux fonctions f et g est une fonction croissante.

Généralités

Fonctions croissantes, décroissantes

Propriétés 2

- Si les deux fonctions f et g ont le même sens de variation, alors leur composée $g \circ f$ est croissante.
- Si les deux fonctions f et g ont des sens de variation différents, alors leur composée $g \circ f$ est décroissante.

Exemple

Etudier la monotonie de la fonction h définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^- \ : \ h(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

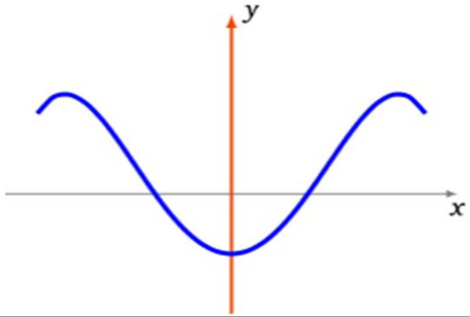
❑ Généralités

Parité

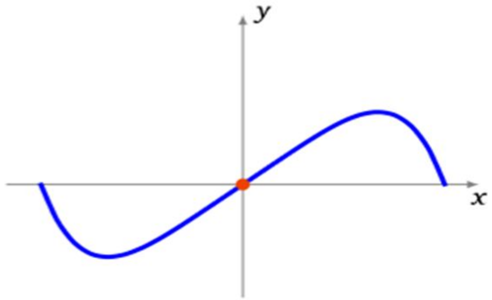
- Soit $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle symétrique par rapport à 0 (c.à.d.. de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$) et f une fonction définie sur cet intervalle.
- f est **paire** si : $\forall x \in I \quad f(x) = f(-x)$
- f est **impaire** si : $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$

Interprétation graphique

f est **paire** si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



f est **impaire** si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.



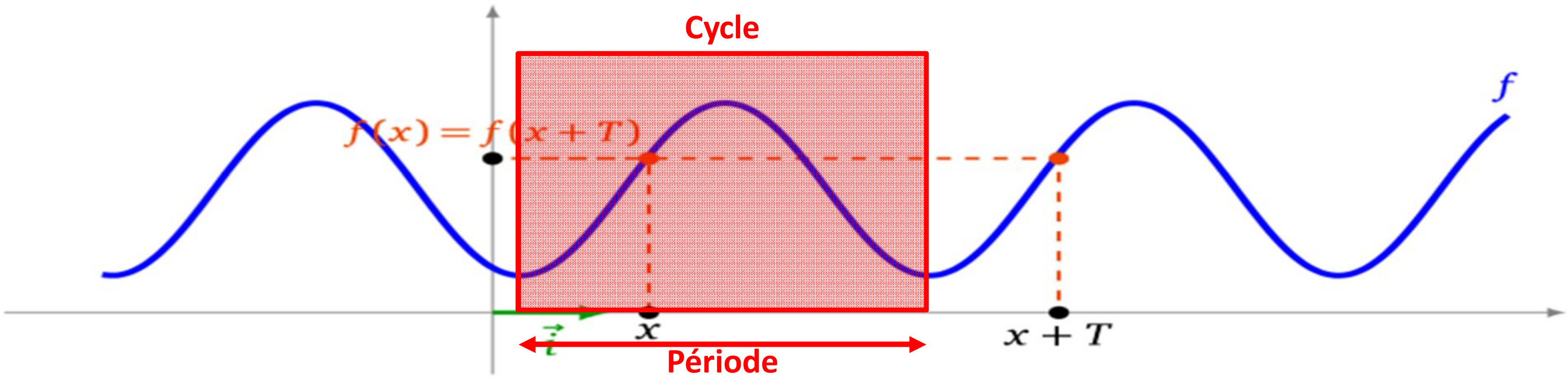
Généralités

Périodicité

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
- Soit **T** un nombre réel positif (**T** > 0).
- f est **périodique de période T** si : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$

Interprétation graphique

f est **périodique de période T** si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$, où $\vec{\imath}$ est le premier vecteur de coordonnées.



Généralités

Exercice applicatif

On considère la fonction f définie par : f(x) $= \frac{1}{x}$

1) *Déterminer le domaine de définition de f.*
2) *Déterminer les images de 4 et 9.*
3) *Déterminer l'antécédent de 2 et* $\frac{1}{5}$.
4) *Etudier la monotonie de f.*
5) *Etudier la parité de la fonction f.*

Généralités

Exercice applicatif : Solution

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$

1) *Déterminer le domaine de définition de f :*

- *La fonction f est définie si* $x \neq 0$. Donc :

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

Généralités

Exercice applicatif : Solution

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$

2) *Déterminer les images de 4 et 9 :*

- $x=4$: $f(x)=? \longrightarrow f(4)=\frac{1}{4}$
- $x=9$: $f(x)=? \longrightarrow f(9)=\frac{1}{9}$

❑ Généralités

Exercice applicatif : Solution

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$

3) *Déterminer l'antécédent de 2 et* $\frac{1}{5}$:

- $f(x)=2$: $x=?$ $\longrightarrow$ $2=\frac{1}{x}$ *Donc :* $x=\frac{1}{2}$
- $f(x)=\frac{1}{5}$: $x=?$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$ *Donc :* $x=5$

Généralités

Exercice applicatif : Solution

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$

4) *Etudier la monotonie de f :*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{x-y} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{x-y} = \frac{\frac{-(x-y)}{xy}}{x-y} = -\frac{1}{xy}$$

- $\forall\, x\epsilon]-\infty;0[\ et\ y\ \epsilon]-\infty;0[\ :\quad -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{xy}} < \mathbf{0}$

  $Donc\ f\ est\ strictement\ décroissante\ sur\ ]-\infty;0[$

- $\forall\, x\epsilon]0;+\infty[\ et\ y\ \epsilon]0;+\infty[\ :\quad -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{xy}} < \mathbf{0}$

  $Donc\ f\ est\ strictement\ décroissante\ sur\ ]0;+\infty[$

f **n ’est pas strictement décroissante sur** $]-\infty;\mathbf{0}[\cup]\mathbf{0};+\infty[$

Généralités

Exercice applicatif : Solution

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$

5) *Etudier la parité de f :*

$On\ sait\ que\ :\ D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ⇒ symétrique

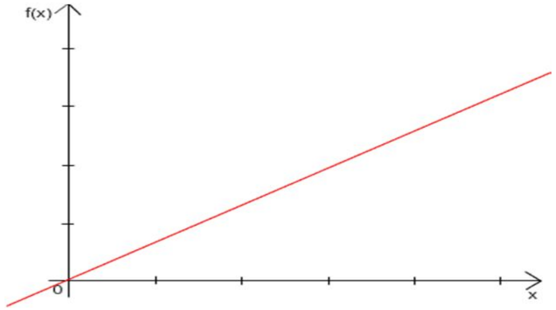
$$On\ a\ : \quad f(-x) = \frac{1}{-x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$$Donc\ : \quad \forall\ x \in D_f : \quad f(-x) = -f(x)$$

$Par\ conséquent, f\ est\ une\ fonction\ impaire.$

❑ Fonctions élémentaires

Fonctions linéaires



- Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.

- On dit que $\boldsymbol{f}$ est une fonction **linéaire**, s'il existe une constante $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, telle que :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} :\ \boldsymbol{f(x) = ax}$$

- Une telle fonction a pour représentation graphique une droite passant par le point (0;0).

Fonctions élémentaires

Fonctions affines

- Soit f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique.

- On dit que f est une fonction **affine**, s'il existe des constantes $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = ax + b$$

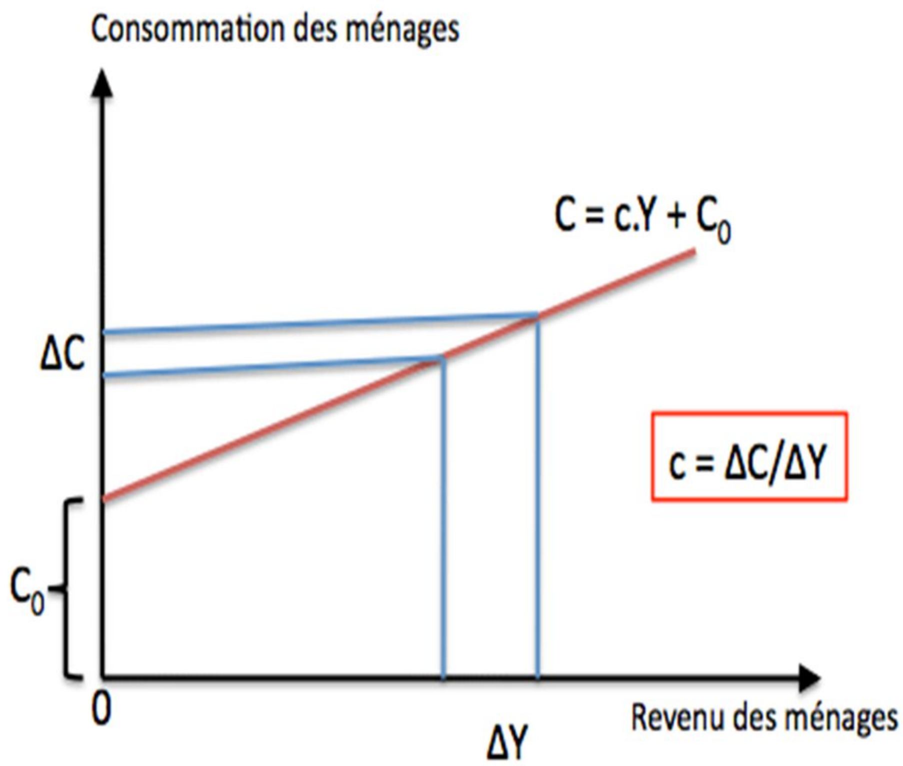
- Une telle fonction a pour représentation graphique une droite dont a est ***la pente*** (ou également ***coefficient directeur***) et b est ***l'ordonnée à l'origine***.

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.

❑ Fonctions élémentaires

Fonctions affines

Exemple : Modèle keynésien simple



La consommation ***C*** est une fonction affine du revenu ***Y*** :

$$C = cY + C_0$$

La pente dans ce cas est ***c***, avec :

$$0 < c < 1$$

(La loi psychologique fondamentale de Keynes : la consommation augmente moins vite que le revenu.)

Fonctions élémentaires

Monôme

- On dit que f est un monôme si elle est définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \; f(x) = ax^k$$

avec a et k sont fixés tels que $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

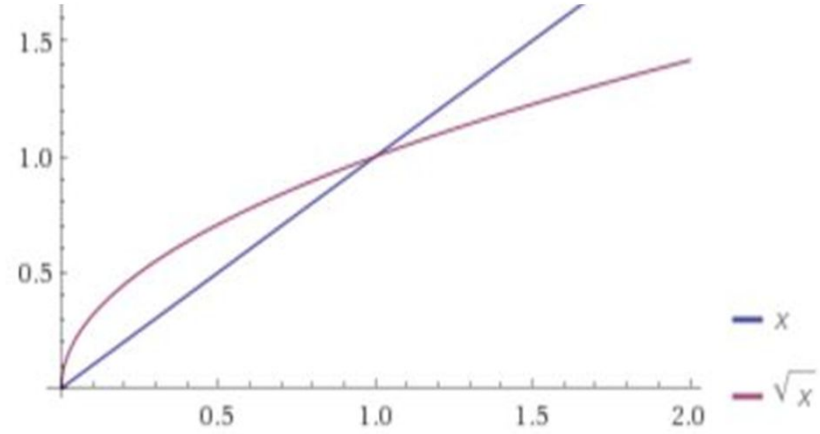
- Si $a \neq 0$, on dit que k est le **degré** du monôme.

Exemples

- *La fonction :* $\forall\, x \in \mathbb{R} : \; f(x) = 2x$ *est monôme de degré 1.*
- *La fonction constante* $\forall\, x \in \mathbb{R} : \; f(x) = 7$ *est un monôme de degré 0.*
- *La fonction* $\forall\, x \in \mathbb{R} : \; f(x) = 9x^5$ *est un monôme de degré 5.*

❑ Fonctions élémentaires

Racine carrée



- La fonction racine carrée f est notée :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+} : f(x) = \sqrt{x}$$

- Pour $x \geq 0$, le nombre $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif dont le carré est égal à x, c'est-à-dire : $(\sqrt{x})^2 = x$.

- Si a > 0, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$x = \sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad x = -\sqrt{a}$$

❑ Fonctions élémentaires

Polynômes

Définition et propriétés

- La fonction f est un **polynôme** (ou une ***fonction polynômiale***) si f est la somme d'un nombre fini de monômes :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \; f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \; \dots, a_n$ sont dans $\mathbb{R}$.

- Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le **degré** du polynôme.
- f peut s'écrire de la façon suivante : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$

❑ Fonctions élémentaires

Polynômes

Racines d'un polynôme

Définition

- Si f est un polynôme, on appelle **racine** de ce polynôme tout nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.

Proposition

- Le réel a est une racine de f si et seulement si il existe un polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (x - a) \times P(x)$

Fonctions élémentaires

Polynômes

Racines d'un polynôme

Corollaire

- Si f est un polynôme de degré n sur $\mathbb{R}$, ayant n racines distinctes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}$, alors f s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

- On en déduit qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

❑ Fonctions élémentaires

Fonctions rationnelles

Définition

- Soit $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
- $\boldsymbol{f}$ est une **fonction rationnelle** si elle s'écrit sous la forme : $\boldsymbol{f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}}$

Où $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$ sont deux fonctions polynômes

Exemple

- *La fonction :* $f(x) = \frac{2x^2-5x+11}{x^2+2x-1}$ *est une fonction rationnelle.*

❑ Fonctions élémentaires

Fonctions rationnelles

Exemple : Coût moyen

- Soit ***C(Q)*** le coût de production d'une quantité $\boldsymbol{Q}$ d'un certain bien par une firme.
- On appelle coût moyen la fonction : $\boldsymbol{CM(Q)} = \dfrac{\boldsymbol{C(Q)}}{\boldsymbol{Q}}$
- Si la fonction de coût ***C*** est un polynôme, alors le coût moyen ***CM*** est une fonction rationnelle.

Coût fixe Coût variable

- Supposons que : ***C(Q)*** $= \boldsymbol{10} + \boldsymbol{2Q}$. Alors : $\boldsymbol{CM(Q)} = \dfrac{\boldsymbol{10 + 2Q}}{\boldsymbol{Q}} = \dfrac{\boldsymbol{10}}{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{2}$

Les limites

Que devient votre chiffre d'affaire si votre prix se rapproche de plus en plus de celui du concurrent?

Les limites

Limite réelle en un point

Définition

- Soit $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Soit $\boldsymbol{x_0}$ un point de I ou une extrémité de I.
- Soit ℓ un nombre réel. On dit que $\boldsymbol{f}$ admet une limite en $\boldsymbol{x_0}$ si $\boldsymbol{f(x)}$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que $\boldsymbol{x}$ est suffisamment proche de $\boldsymbol{x_0}$.
- On parle alors de la limite ℓ de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$. On note :

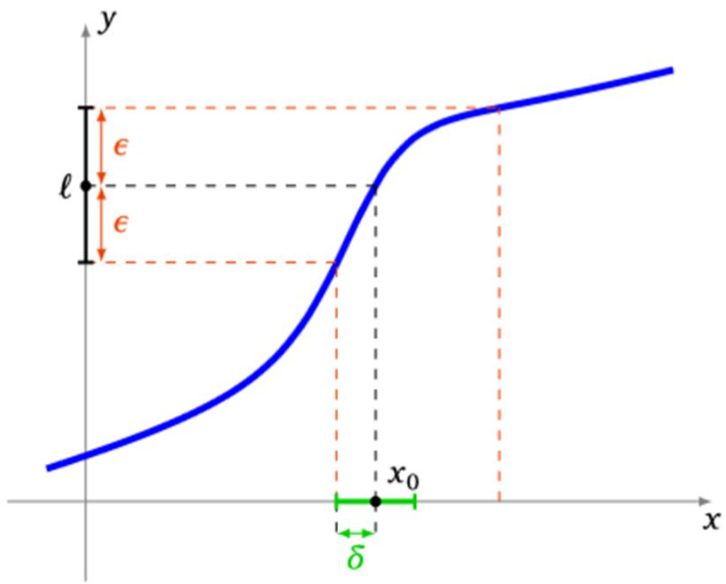
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x_0} f = \ell$$

- On dit que $\boldsymbol{f(x)}$ tend vers ℓ quand $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x_0}$.

❑ Les limites

Limite finie en un point

Définition



- Soit f : **I** → ℝ une fonction numérique. Soit $\boldsymbol{x_0}$ un point de I ou une extrémité de I.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\boldsymbol{f}$ a pour limite ℓ en $\boldsymbol{x_0}$ si :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon}$$

***f*(*x*) est aussi proche que l’on veut de ℓ dès que *x* est suffisamment proche de $\boldsymbol{x_0}$**

- On dit que ***f*(*x*)** tend vers ℓ quand ***x*** tend vers $\boldsymbol{x_0}$. On note :

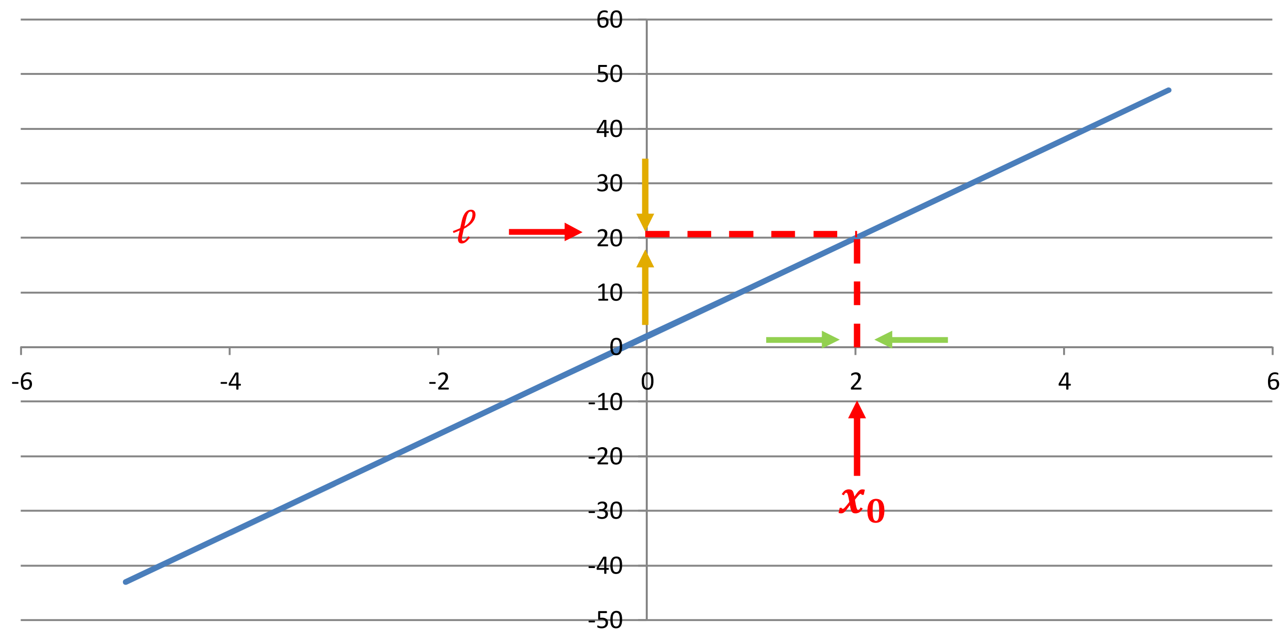
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad \lim_{x_0} f = \ell$$

❑ Les limites

Limite finie en un point

Exemple

$$f(x) = 9x + 2 \text{ et } x_0 = 2 \Longrightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 9(2) + 2 = 20$$

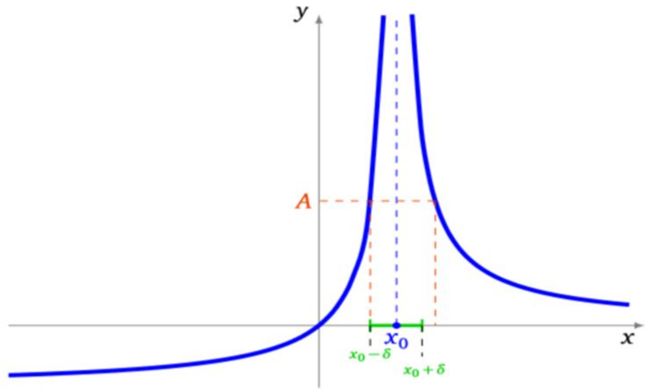


Alors quand $\boldsymbol{x}$ se rapproche de 2, $\boldsymbol{f}$**(x)** se rapproche de 20.

Les limites

Limite infinie en un point

Définition



- Soit f : $]a, x_0[\cup]x_0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0, qu'on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si :

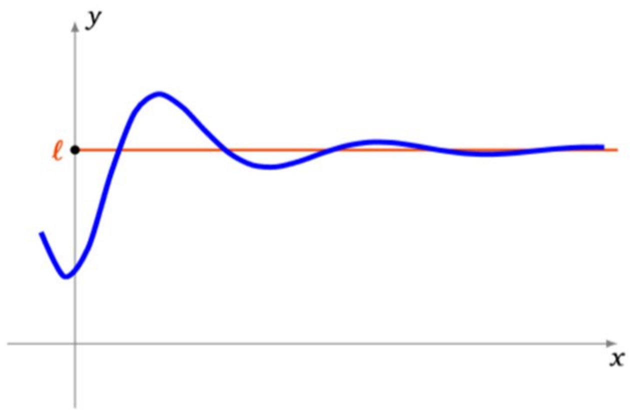
$$\boxed{\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A}$$

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0, qu'on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si :

$$\boxed{\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A}$$

Les limites

Limite en l'infini



Définition

- Soit $f :]\boldsymbol{a}, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
- On dit que $\boldsymbol{f}$ a pour limite ℓ en $+\infty$, qu'on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon}$$

- On dit que $\boldsymbol{f}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, qu'on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si :

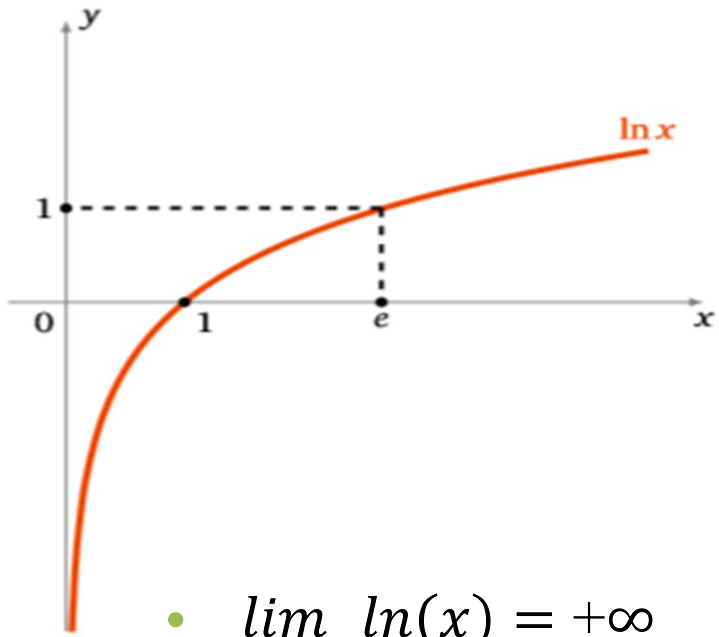
$$\boxed{\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A}$$

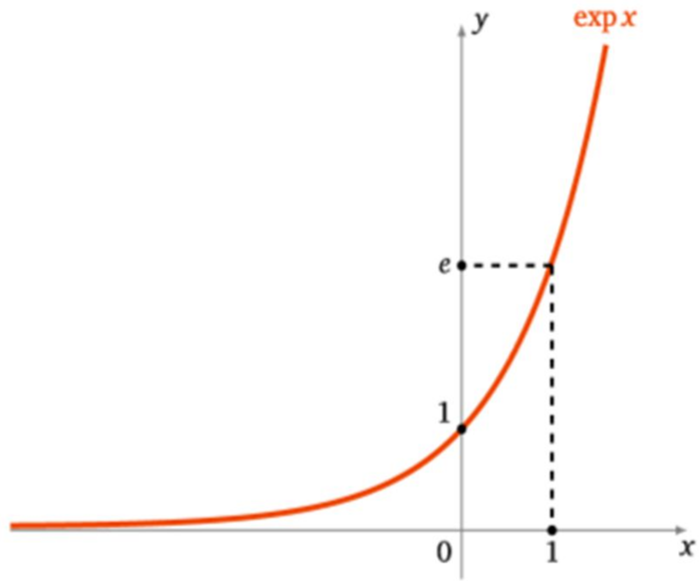
De la même manière, on définirait la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, \boldsymbol{a}[$.

❑ Les limites

Limite en l'infini

Exemples



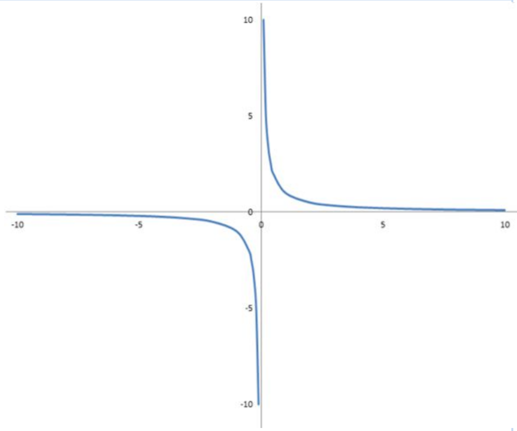


- $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

❑ Les limites

Limite à gauche et à droite

Définition



- Soit $f :]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_0}[\cup]\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{b}[\to \mathbb{R}$ une fonction numérique.

- On appelle **limite à droite** en $\boldsymbol{x_0}$ de $\boldsymbol{f}$ la limite de la fonction $f_{|]x_0,b[}$ en $\boldsymbol{x_0}$ et on la note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f$.

- On appelle **limite à gauche** en $\boldsymbol{x_0}$ de $\boldsymbol{f}$ la limite de la fonction $f_{|]a,x_0[}$ en $\boldsymbol{x_0}$ et on la note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f$.

Les limites

Limite à gauche et à droite

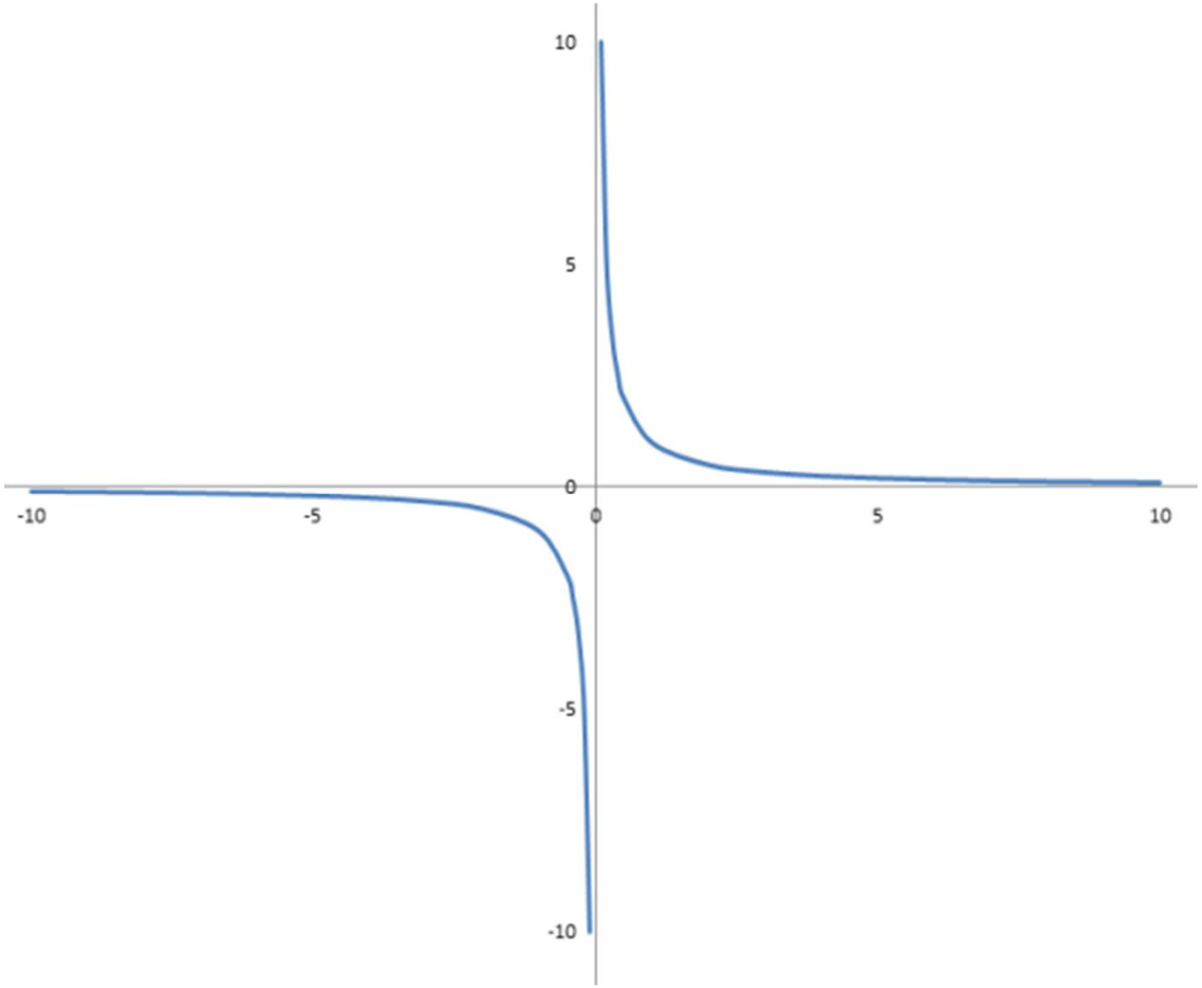
Exemples

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$



❑ Les limites

Limite à gauche et à droite

Application : Limite de la demande quand le prix varie

Soit F_1 une firme monopole

Elle fixe un prix P_1

Demande : $\boldsymbol{Q_1(P_1) = 40 - 2P_1}$

Soit F_2 une firme concurrente

Elle fixe le prix à $\boldsymbol{P_2 = 8}$

Si les clients ne tiennent compte que du prix, quelle sera la demande Q_1 qui s'adresse à F_1 en fonction du prix P_2 fixé par F_2?

❑ Les limites

Limite à gauche et à droite

Application : Limite de la demande quand le prix varie

Soit F_1 une firme monopole

Elle fixe un prix P_1

Demande : $\boldsymbol{Q_1(P_1) = 40 - 2P_1}$

Soit F_2 une firme concurrente

Elle fixe le prix à $\boldsymbol{P_2 = 8}$

$P_1 < 8$ → $Q_2 = 0$ et $Q_1(P_1) = 40 - 2P_1$ $\quad \lim\limits_{P_1 \to 8^-} Q_1(P_1) = 40 - 2 \times 8 = 24$

Car tout le monde préfère F_1 qui est moins chère

$P_1 = 8$ → $Q_2 = Q_1(P_1) \Rightarrow Q_1(P_1) = \frac{1}{2}(40 - 2 \times 8) = 12$ $\quad Q_1(8) = 12$

Chaque firme prendra 50% du marché car elles ont même prix

$P_1 > 8$ → $Q_1(P_1) = 0$ $\quad \lim\limits_{P_1 \to 8^+} Q_1(P_1) = 0$

Car tout le monde préfère F_2 qui est moins chère

Les limites

Propriétés

Proposition 1

- Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Proposition 2

- Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

  - $\lim\limits_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
  - $\lim\limits_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
  - Si $\ell \neq 0$, alors : $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$
  - $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = \ell + \ell'$
  - Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors : $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = 0$

Les limites

Propriétés

Proposition 3

- Soit f une fonction définie sur $]a, b[$:

1. Si $\boldsymbol{f}$ est croissante et majorée sur $]a, b[$ alors elle admet une limite en b^-.
2. Si $\boldsymbol{f}$ est croissante et minorée sur $]a, b[$ alors elle admet une limite en a^+.
3. Si $\boldsymbol{f}$ est décroissante et majorée sur $]a, b[$ alors elle admet une limite en a^+.
4. Si $\boldsymbol{f}$ est décroissante et minorée sur $]a, b[$ alors elle admet une limite en b^-.

Les limites

Théorèmes de comparaison

Proposition 4

- Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x_0} g \circ f = \ell'$.

Proposition 5

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :$\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.

Les limites

Théorèmes de comparaison

Proposition 6:

- S'il existe un nombre réel $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ pour tout $\boldsymbol{x \geq A}$, et si $\boldsymbol{f}$ admet une limite ℓ quand $\boldsymbol{x}$ tend vers $+\infty$, alors cette limite est telle que $\ell \geq \mathbf{0}$.

Corollaire :

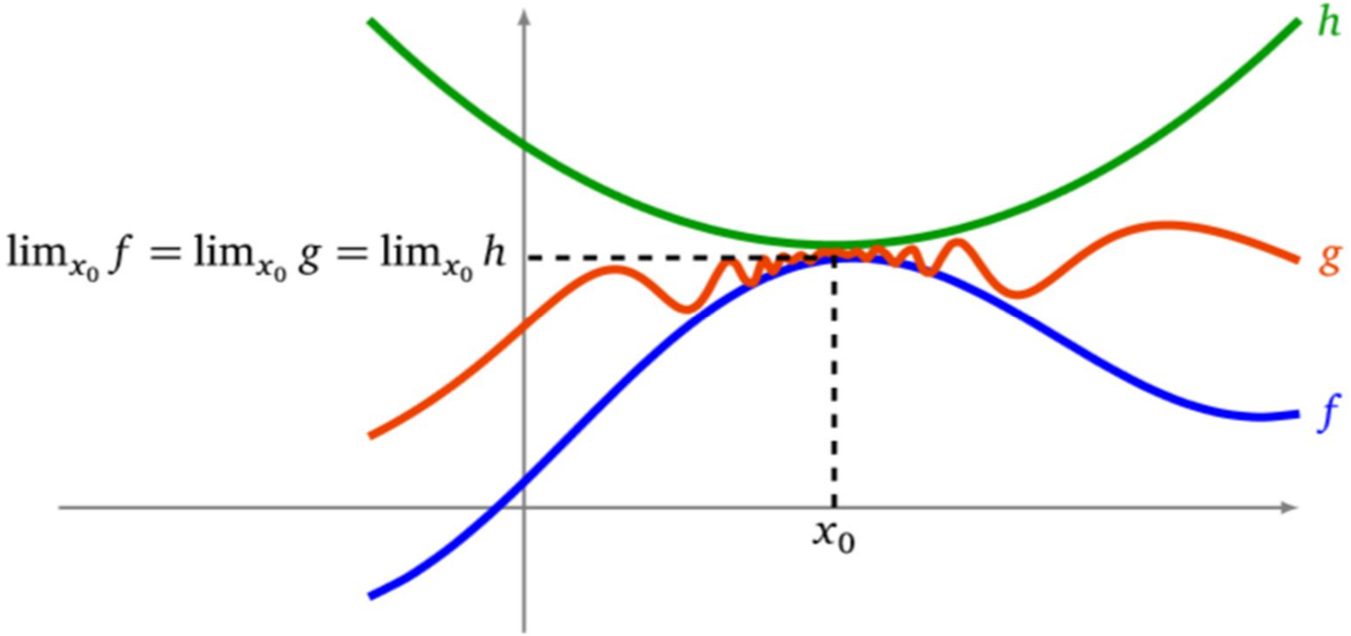
- S'il existe un nombre réel $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{B \leq f(x) \leq C}$ pour tout $\boldsymbol{x \geq A}$, et si $\boldsymbol{f}$ admet une limite ℓ quand $\boldsymbol{x}$ tend vers $+\infty$, alors cette limite est telle que $\boldsymbol{B} \leq \ell \leq \boldsymbol{C}$.

Les limites

Théorèmes de comparaison

Théorème des gendarmes :

- Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors : $\lim_{x_0} g = \ell$.



Les limites

Règles de calcul

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	**?**	$\pm\infty$

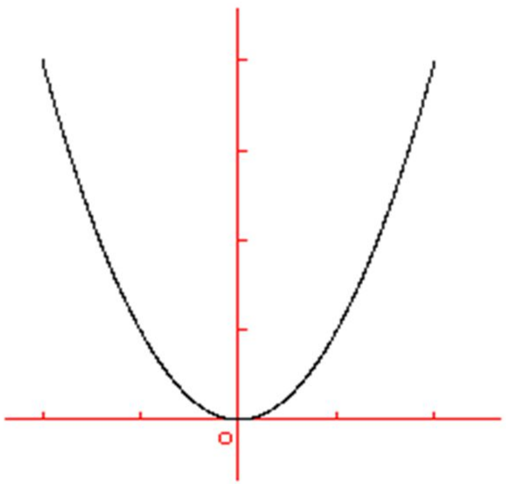
$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	ℓ	$+\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	0	0	$\pm\infty$	$+\infty$	ℓ
$\lim(f/g)$	ℓ/ℓ'	$\pm\infty$	**?**	**?**	0	$\pm\infty$

❑ Les limites

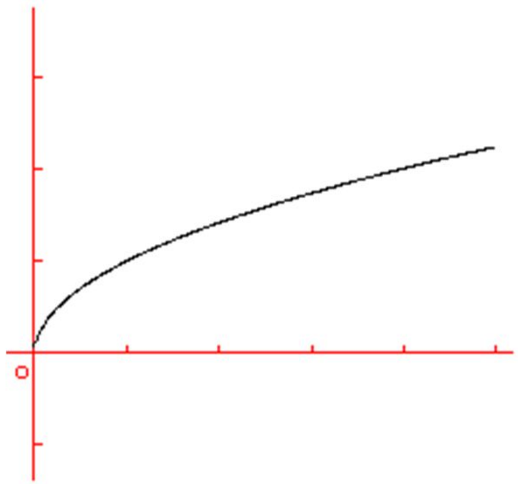
Branche infinie

Définition

- On dit que le graphe C_f de la fonction f a une **branche infinie** si, lorsque *M(x,f(x))* parcourt la courbe C_f, ce point *M* finit par s'éloigner indéfiniment.



Branche parabolique de direction (Oy)



Branche parabolique de direction (Ox)

❑ Les limites

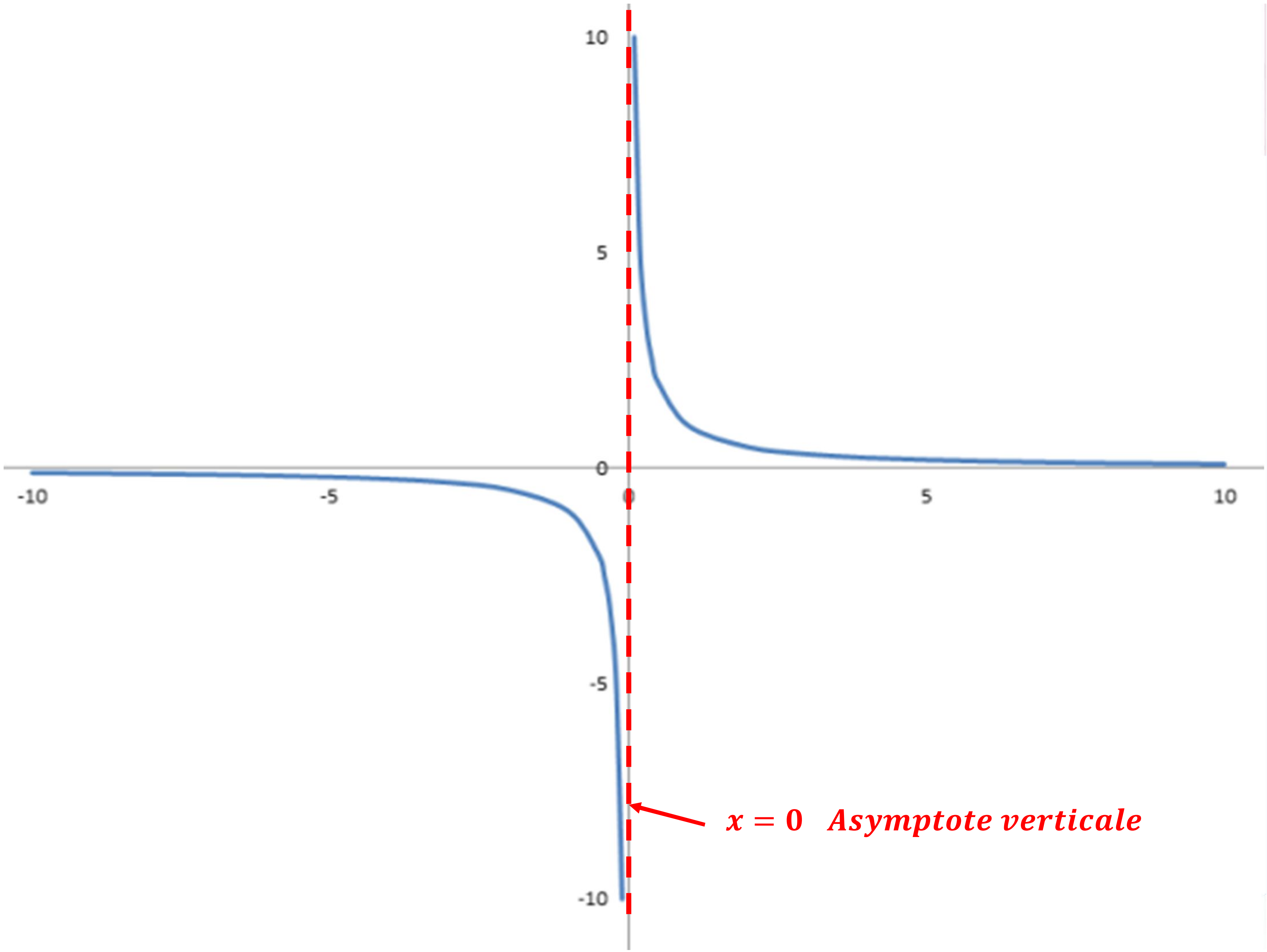
Asymptote

Définition :

- Si, lorsque $\boldsymbol{M}$ parcourt une branche infinie de $\boldsymbol{C_f}$, ce point s'approche de plus en plus d'une droite fixée, on dit que cette droite est asymptote à la courbe.

Proposition :

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors la droite verticale d'équation $\boldsymbol{x = x_0}$ est asymptote à la courbe $\boldsymbol{C_f}$.


10
5
0
-5
-10
-10
-5
5
10
$x = 0$ Asymptote verticale

Les limites

Limites de polynômes et de fonctions rationnelles

Proposition 8:

- La limite en $\pm\infty$ d’un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^4 + 11x^3 + 2) = \lim\limits_{x\to+\infty}(5x^4) = +\infty$

Proposition 9:

- La limite en $\pm\infty$ d’une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus hauts degrés.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 + x + 7}{6x^3 + 1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{6x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6x}\right) = 0$

Chapitre 3 : La continuité

Si votre revenu augmente, votre consommation sera plus élevée, mais cette augmentation de consommation sera-t-elle régulière, ou bien y aura-t-il de brusques sauts?

La continuité

Continuité en un point

Définition

- Soit $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
- Soit x_0 un point de $\mathbf{I}$.
- On dit que f est **continue** en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque

- Pour que f soit continue en x_0, il est nécessaire que f soit définie en x_0.

❑ La continuité

Continuité en un point

Définition

f est continue en x_0

1. f est définie en x_0
2. La limite de f en x_0 existe
3. La limite de f en x_0 doit être égale à $f(x_0)$

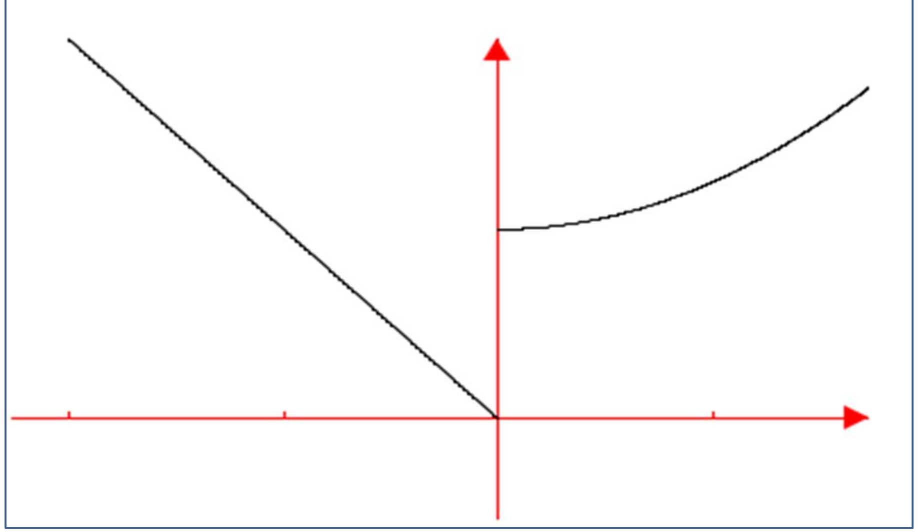
❑ La continuité

Continuité en un point

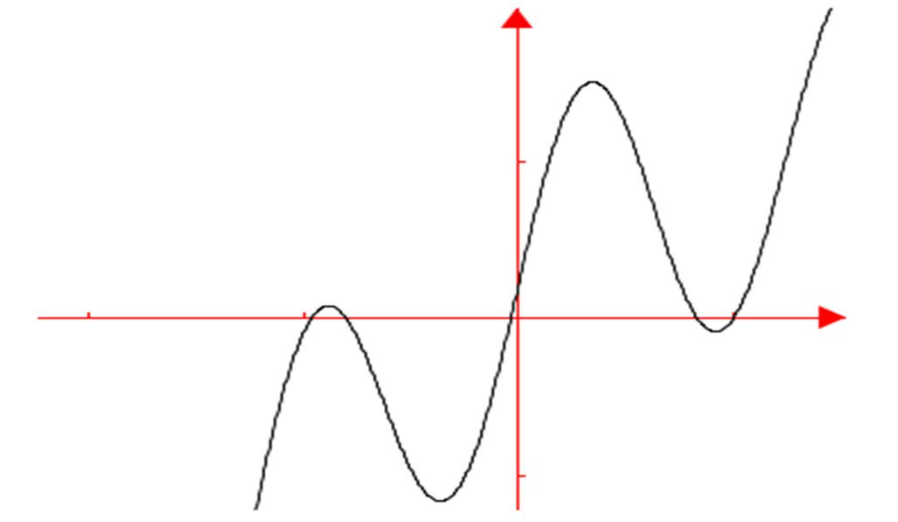
Interprétation graphique

- Une fonction est continue sur un intervalle si et seulement si on peut la dessiner d’un seul trait sans lever le crayon.

Fonction discontinue en 0



Fonction continue en 0



La continuité

Continuité en un point

Proposition 1

- Si $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont deux fonctions continues en $\boldsymbol{x_0}$, alors $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ sont continues en $\boldsymbol{x_0}$.
- Si de plus $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0}) \neq 0$, alors $\boldsymbol{f} / \boldsymbol{g}$ est continue en $\boldsymbol{x_0}$.

Proposition 2

- Si $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{x_0}$, et si $\boldsymbol{g}$ est continue en $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x_0})$, alors $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{x_0}$.

La continuité

Continuité en un point

Exemples de références

1. Les fonctions $f(x) = x^n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$). En particulier, toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $f(x) = x^{-n}$ sont continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$).
3. La fonction $f(x) = ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. La fonction $f(x) = exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
6. La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

❑ La continuité

Continuité en un point

Prolongement par continuité : Définition

- Il arrive souvent qu'une fonction soit définie a priori sur un intervalle **I** de $\mathbb{R}$, sauf en un point $\boldsymbol{x_0}$, mais qu'elle admet une limite finie ℓ en ce point.
- Dans ce cas, on a tendance à poser $\boldsymbol{f(x_0)} = \ell$ pour que $\boldsymbol{f}$ soit définie aussi en $\boldsymbol{x_0}$.
- La fonction $\boldsymbol{f}$ a ainsi été ***prolongée*** en $\boldsymbol{x_0}$, puisque son domaine de définition est maintenant l'intervalle **I** tout entier. Cette fonction vérifie $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = f(x_0)$ donc elle est continue en $\boldsymbol{x_0}$.
- On dit que l'***on a prolongé f par continuité en*** $\boldsymbol{x_0}$.

La continuité

Continuité en un point

Prolongement par continuité : Théorème

- Soit f une fonction définie sur $\mathbf{I}$ sauf x_0.
- Si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, alors la fonction $\check{f}$ définie par :

$$\check{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in \mathbf{I} - \{x_0\} \\ \ell & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0 par prolongement par continuité de f en x_0.

- Si de plus f est continue sur $\mathbf{I} - \{x_0\}$ alors la fonction prolongée $\check{f}$ est définie et continue sur $\mathbf{I}$ tout entier.

La continuité

Continuité en un point

Prolongement par continuité : Exemple

- Soit la fonction : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(x-2)}$ $\forall\, x \geq 0$, avec $x \neq 2$.
- La fonction f est continue sur $[0; 2[$ et sur $]2; +\infty[$. On a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(x-2)} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

- Donc :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

- En posant $f(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ on prolonge f par continuité en 2.

La continuité

Continuité en un point

Prolongement par continuité : Exemple

- Par conséquent, la fonction $\check{f}$ est définie par :

$$\check{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(x-2)} & si \quad x \neq 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & si \quad x = 2 \end{cases}$$

La continuité

Continuité à gauche, continuité à droite

Définition

- On dit que f est **continue à gauche** en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est **continue à droite** en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Propriété

- f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

❑ La continuité

Continuité à gauche, continuité à droite

Exemple

- Soit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

- Étudier la continuité de f en 0.

La continuité

Continuité à gauche, continuité à droite

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Solution

- Calculons $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$:
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$ (Car $\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$)

    Donc f est continue à droite de 0.

  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f(0)$

    Donc f est continue à gauche de 0.

D'où f est continue en 0.

❑ La continuité

Effet de seuil : changement de comportement induit par l'existence de seuils dans une mesure de politique économique.

Continuité à gauche, continuité à droite

Exemple : L'impôt en fonction du revenu, est-elle continue?

- Soit T le montant de l'impôt sur le revenu calculé de la façon suivante, en fonction du revenu R annuel de la personne considérée.
  - Si $R < 10000$, alors cette personne ne paie rien;
  - Si $10000 \leq R < 20000$, alors elle paie en impôts 10% de son revenu total R;
  - Si $20000 \leq R < 30000$, alors elle paie en impôts 20% de son revenu total R;
  - Si $R \geq 30000$, alors elle paie en impôts 30% de son revenu total R;

1. Donner la modélisation mathématique de la fonction $f(R) = T$.
2. Calculer les différentes limites de la fonction f. Commenter.
3. Proposer une nouvelle modélisation pour éliminer les effets de seuil.

❑ La continuité

Continuité à gauche, continuité à droite

Solution : L'impôt en fonction du revenu, est-elle continue?

1. La fonction $\boldsymbol{T = f(R)}$ est décrite de la façon suivante :

$$\boldsymbol{f(R) = \begin{cases} 0 & si \quad R < 10000 \\ 0,1 \times R & si \quad 10000 \le R < 20000 \\ 0,2 \times R & si \quad 20000 \le R < 30000 \\ 0,3 \times R & si \quad R \ge 30000 \end{cases}}$$

2. Calculons les limites à gauche et à droite aux points : $\boldsymbol{R = 10000}$, $\boldsymbol{R = 20000}$ et $\boldsymbol{R = 30000}$. On a : $f\ n'est\ pas\ continue\ en\ R = 30000$

$\neq$

$$\lim_{R \to 10000^-} f(R) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R \to 10000^+} f(R) = 0,1 \times 10000 = 1000$$

$$\lim_{R \to 20000^-} f(R) = 0,1 \times 10000 = 2000 \quad \text{et} \quad \lim_{R \to 20000^+} f(R) = 0,2 \times 20000 = 4000$$

$$\lim_{R \to 30000^-} f(R) = 0,2 \times 30000 = 6000 \quad \text{et} \quad \lim_{R \to 30000^+} f(R) = 0,3 \times 30000 = 9000$$

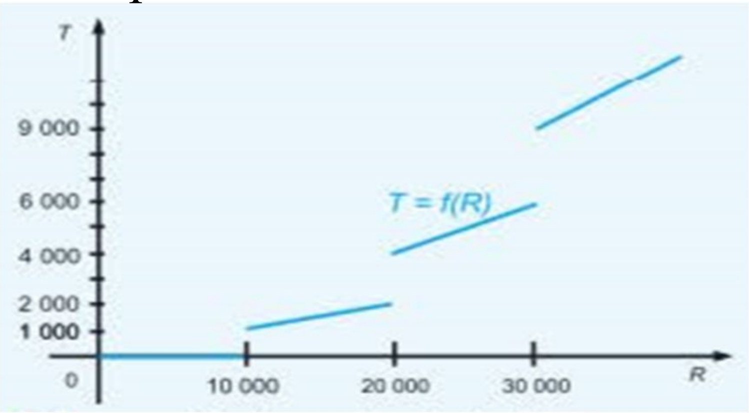
❑ La continuité

Continuité à gauche, continuité à droite

Solution : L'impôt en fonction du revenu, est-elle continue?

2. Commentaire :

- Une personne qui gagne 9990 DH ne paiera pas d'impôt. Donc son revenu net est 9990 DH.
- Par contre, une personne qui gagne 10000 DH paiera 1000 DH d'impôt. Donc son revenu net sera 9000 DH.

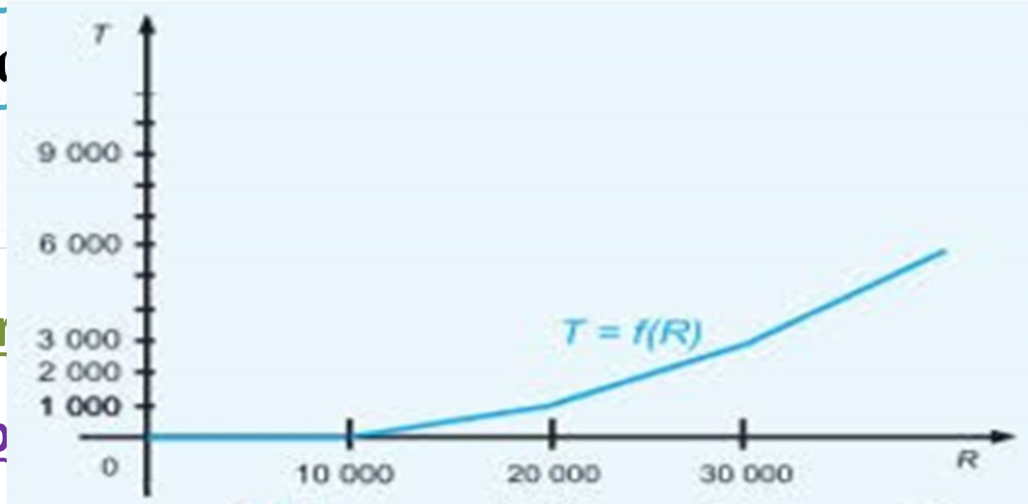


- La fonction est une fonction croissante : plus le revenu est élevé, plus l'impôt est élevé. Par contre cette fonction est discontinue car il y a des sauts. Donc il y a un paradoxe : le revenu net n'est pas une fonction croissante du revenu.

La continuité

Continuité à gauche, continuité à dr

Solution : L'impôt en fonctio



3. Pour éviter ces effets de seuil, il vaut mieux que le montant T de l'impôt sur le revenu soit calculé, en fonction du revenu R, de la façon suivante :

$$\boldsymbol{f(R)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{R < 10000} \\ \mathbf{0{,}1}\boldsymbol{R} - \mathbf{1000} & \boldsymbol{si} \quad \mathbf{10000} \leq \boldsymbol{R} < \mathbf{20000} \\ \mathbf{0{,}2}\boldsymbol{R} - \mathbf{3000} & \boldsymbol{si} \quad \mathbf{20000} \leq \boldsymbol{R} < \mathbf{30000} \\ \mathbf{0{,}3}\boldsymbol{R} - \mathbf{6000} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{R} \geq \mathbf{30000} \end{cases}$$

$\lim_{R \to 10000^-} f(R) = 0$ et $\lim_{R \to 10000^+} f(R) = 0{,}1 \times 10000 - 1000 = 0$

$\lim_{R \to 20000^-} f(R) = 0{,}1 \times 20000 - 1000 = 1000$ et $\lim_{R \to 20000^+} f(R) = 0{,}2 \times 20000 - 3000 = 1000$

$\lim_{R \to 30000^-} f(R) = 0{,}2 \times 30000 - 3000 = 3000$ et $\lim_{R \to 30000^+} f(R) = 0{,}3 \times 30000 - 6000 = 3000$

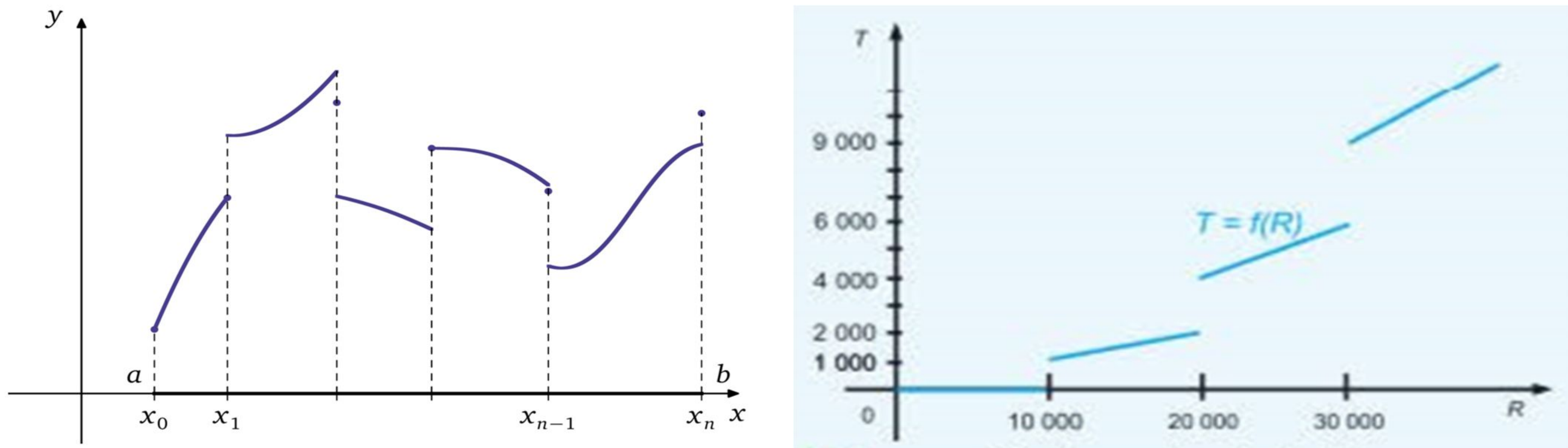
- *Les limites à gauche et à droite sont égales. Donc : T=f(R) est continue*

❑ La continuité

Fonction continue par morceau

Définition

- On dit qu’une fonction $\boldsymbol{f}$ est continue par morceau sur $[a, b]$ si $\boldsymbol{f}$ est continue sur $[a, b]$ sauf un nombre fini de points en lesquels elle possède des limites finies à gauche et à droite.



La continuité

Continuité sur un intervalle

Définition

- On dit que f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Remarque

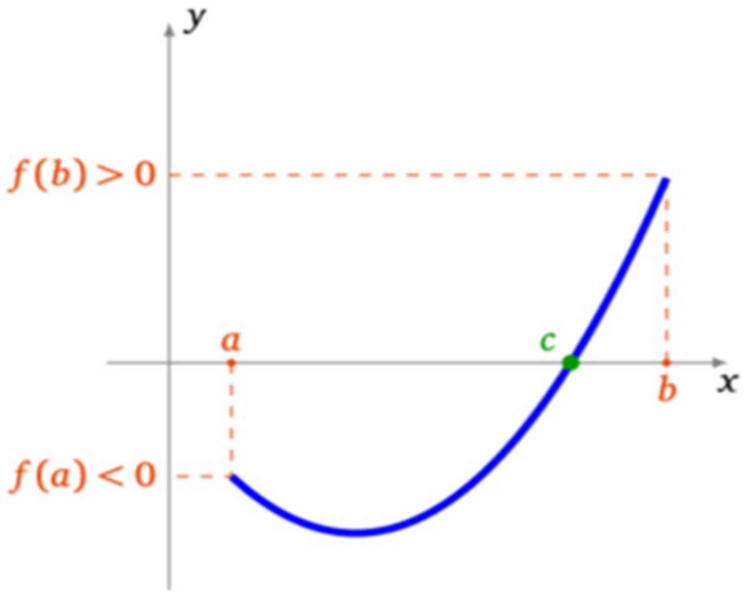
- Si I est de type $I = [a, b]$, on dira que f est continue sur I si elle est continue en tout point de $]a, b[$, et continue à droite en a, et continue à gauche en b.

La continuité

Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires (1ère version)

- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que : $f(c) = 0$.

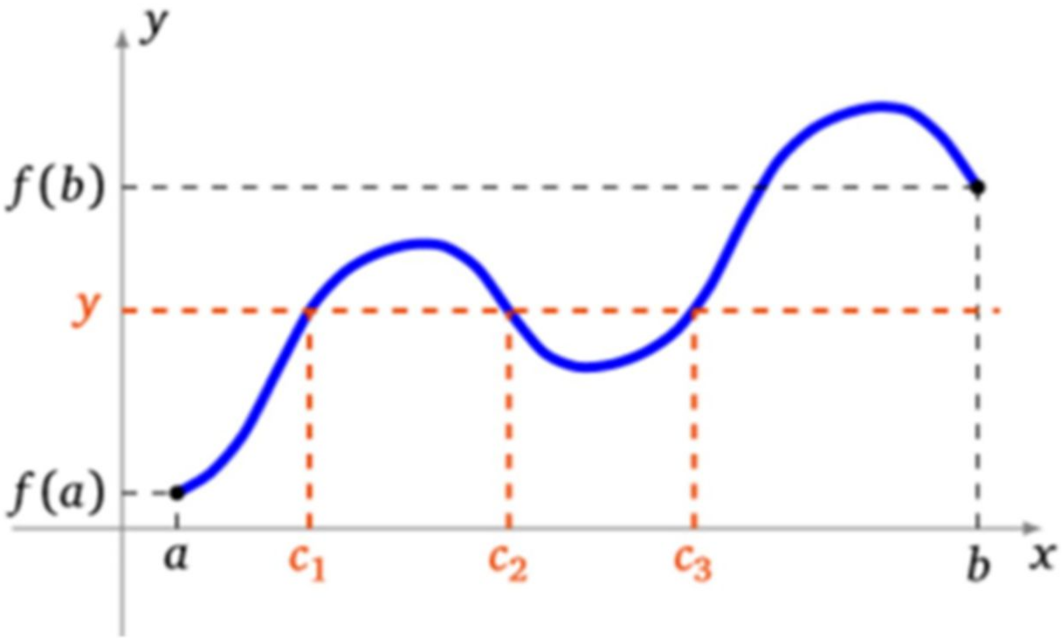


❑ La continuité

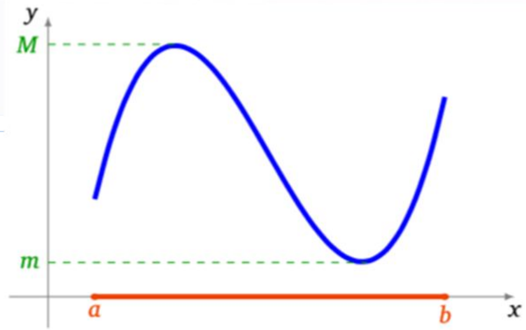
Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires (2ère version)

- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Si le nombre $\boldsymbol{y}$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un réel $\boldsymbol{c}$ compris entre a et b tel que : $f(c) = \boldsymbol{y}$.



La continuité



Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs extrêmes

- Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors, l’image par f de $[a, b]$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$.

Remarque

- Le théorème des valeurs extrêmes ne s’applique pas pour une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ ou semi-ouvert $[a, b[$ ou $]a, b]$, ni sur un intervalle non borné comme $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.

La dérivée

Quand la quantité produite augmente, de combien augmente le coût approximativement?

La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Rappel : Taux d'accroissement

- Soit f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique.
- Le taux d'accroissement (ou accroissement moyen) de f entre les points x_0 et x_1 est le ratio :

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad \text{avec } x_0 \neq x_1.$$

- Le taux d'accroissement est souvent noté $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, avec $\Delta x = x_1 - x_0$ et $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$.

La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Exemple : Taux d'accroissement du coût de production

- Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction du coût total de production $\boldsymbol{C}$ d'une quantité $\boldsymbol{Q}$ définie par : $\boldsymbol{f}(\mathbf{Q}) = \mathbf{100} + \mathbf{2}\boldsymbol{Q}^{\mathbf{2}}$, où $\mathbf{100}$ est le coût fixe et $\mathbf{2}\boldsymbol{Q}^{\mathbf{2}}$ est le coût variable.
- Supposons que la production initiale est de $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{0}} = \mathbf{10}$ et la production finale est de $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{1}} = \mathbf{12}$.
- Calculer le taux d'accroissement du coût de production.

La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Exemple : Taux d'accroissement du coût de production

- Le coût initial est : $\boldsymbol{C_0 = f(Q_0) = 100 + 2(10)^2 = 100 + 200 = 300.}$
- Le coût final est : $\boldsymbol{C_1 = f(Q_1) = 100 + 2(12)^2 = 100 + 288 = 388.}$
- L'augmentation du coût est: $\boldsymbol{\Delta C = C_1 - C_0 = 388 - 300 = 88}$.
- L'augmentation de la production est: $\boldsymbol{\Delta Q = Q_1 - Q_0 = 12 - 10 = 2}$.
- Le taux d'accroissement est : $\boldsymbol{\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{88}{2} = 44}$.
- Donc, l'augmentation du coût est en moyenne de $\boldsymbol{44}$ par unité produite supplémentaire.

❑ La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Définition 1

- On dit que la fonction f est **dérivable** au point x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0.
- On appelle **dérivée** (ou nombre dérivé) de la fonction f au point x_0 le nombre $f'(x_0)$ défini par : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- La dérivée est notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Définition 2

- On dit que la fonction f est **dérivable** au point x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se rapproche d'une limite finie quand h tend vers 0.

- On appelle **dérivée** (ou nombre dérivé) de la fonction f au point x_0 le nombre $f'(x_0)$ défini par : $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

❑ La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Proposition 1 : Equation de la tangente

- Si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0.
- La tangente à la courbe C_f en x_0 est la droite de l'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Exemple 1

- Soit la fonction $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

1. Utiliser la deuxième définition pour calculer la dérivée $\boldsymbol{f'(x_0)}$.
2. Donner l'interprétation géométrique.
3. Calculer $\boldsymbol{f'\left(\frac{1}{2}\right)}$ et $\boldsymbol{f'(-1)}$.
4. Tracer la tangente aux points : $(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$ et (-1;1).

❑ La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Solution

1. On a : $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Or : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = 2x_0 + h$

Ainsi : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0$

Donc : $\boldsymbol{f'(x_0) = 2x_0}$

La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Solution

2. **Interprétation géométrique :**

Etude des variation d'une fonction

La dérivée

Dérivée d’une fonction en un point

Solution

3. On sait que : $\boldsymbol{f'(x_0) = 2x_0}$

Ainsi : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

Et : $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$

La dérivée

Dérivée d'une fonction en un point

Solution

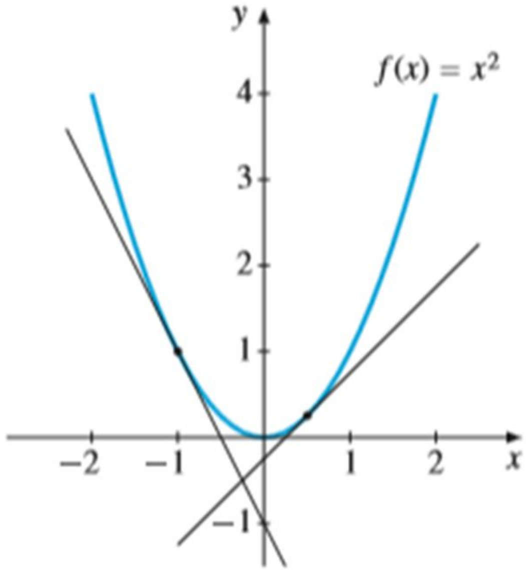
4. On sait que la tangente à la courbe $\boldsymbol{C_f}$ en $\boldsymbol{x_0}$ est la droite de l'équation : $\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$. Donc :

- Pour $(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$: $y = \frac{1}{4} + 1 \times \left(x - \frac{1}{2}\right)$

  Alors : $y = x - \frac{1}{4}$

- Pour (-1;1) : $y = 1 + (-2) \times (x + 1)$

  Alors : $y = -2x - 1$



La dérivée

Nombre dérivé à gauche ou à droite

Définition

- On dit que la fonction f est **dérivable** à droite en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0^+.
- On appelle cette limite le nombre dérivé à droite de la fonction f en x_0 et il est noté $f'_d(x_0)$ et défini par : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- De la même façon, sous réserve d'existence de $f'_g(x_0)$, on définit : $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

La dérivée

Nombre dérivé à gauche ou à droite

Proposition 2

- S'ils existent, alors les réels $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ sont respectivement les coefficients directeurs des demi-tangentes à droite et à gauche à C_f au point d'abscisse x_0.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en x_0 et la courbe C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable à gauche en x_0 et la courbe C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

La dérivée

Nombre dérivé à gauche ou à droite

Proposition 3

- La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et si : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Définition

- Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais sont différents, alors f n'est pas dérivable en x_0.
- On dit que le point d'abscisse x_0 est un point anguleux de C_f.

La dérivée

Calculs de dérivées

Proposition 4 : Dérivée d’une fonction constante

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction constante : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{c} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, où **c** est une constante fixée, $c \in \mathbb{R}$. Alors : $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Proposition 5 : Dérivée d’une fonction racine carrée

- Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x} \quad \forall\, x \geq 0$. Alors $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $]\mathbf{0}, +\infty[$, et $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}} \quad \forall\, x > 0$.

❑ La dérivée

Calculs de dérivées

Proposition 6 : Dérivées d’une somme, d’un produit

- Soient $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ deux fonctions dérivables sur l’intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$ de $\mathbb{R}$.

1. Si $\boldsymbol{f}$ est définie par $\boldsymbol{f(x) = g(x) + h(x)}$, alors $\boldsymbol{f}$ est dérivables et :

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x) + h'(x)}$$

2. Si $\boldsymbol{f}$ est définie par $\boldsymbol{f(x) = g(x) \times h(x)}$, alors $\boldsymbol{f}$ est dérivables et :

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)}$$

❑ La dérivée

Calculs de dérivées

Proposition 7 : Dérivées d'un quotient

- Soient g et h deux fonctions dérivables sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et $h(x) \neq 0$.

1. Si f est définie par $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, alors f est dérivables et :

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

2. Si f est définie par $f(x) = \frac{1}{h(x)}$, alors f est dérivables et :

$$f'(x) = \frac{-h'(x)}{[h(x)]^2}$$

La dérivée

Calculs de dérivées

Corollaire

- Soit $\boldsymbol{g}$ une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$ de $\mathbb{R}$, et c une constante, $c \in \mathbb{R}$.

1. Si $\boldsymbol{f}$ est définie par $\boldsymbol{f(x) = g(x) + c}$, alors $\boldsymbol{f}$ est dérivables et :

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x)}$$

2. Si $\boldsymbol{f}$ est définie par $\boldsymbol{f(x) = g(x) \times c}$, alors $\boldsymbol{f}$ est dérivables et :

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x) \times c}$$

La dérivée

Calculs de dérivées

Proposition 8 : Dérivée d'une fonction composée

- Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, telle que :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Proposition 9 : Dérivée d'un monôme

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Alors f est dérivable et :

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

La dérivée

Calculs de dérivées

Proposition 10 : Dérivée d'un polynôme

- Tout polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est la somme des monômes qui le composent :
- Si, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Alors :

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

La dérivée

Calculs de dérivées

Proposition 11 : Dérivée d'une fonction rationnelle

- Soit f une fonction rationnelle, définie par : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Alors :

$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2} \qquad (Q(x) \neq 0)$$

Proposition 12

- Si f est définie par $f(x) = \frac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$. Alors :

$$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

❑ La dérivée

Dérivées d'ordre supérieur

Définition

- Soit $\boldsymbol{f}$ définie et dérivable sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$ de ℝ. Sa dérivée $\boldsymbol{f'}$ est appelée **dérivée première** de $\boldsymbol{f}$.
- Si $\boldsymbol{f'}$ est dérivable, on appelle la dérivée de $\boldsymbol{f'}$ la **dérivée seconde** de $\boldsymbol{f}$, notée $\boldsymbol{f''}$.
- Si $\boldsymbol{f''}$ est dérivable, sa dérivée est la **dérivée troisième** de $\boldsymbol{f}$, notée $\boldsymbol{f^{(3)}}$.
- Ainsi, on définit la **dérivée** $\boldsymbol{n^{ième}}$ de $\boldsymbol{f}$ $(\forall\, n \geq 2)$, notée $\boldsymbol{f^{(n)}}$, la dérivée de la dérivée $(\boldsymbol{n-1})^{\boldsymbol{ième}}$ de $\boldsymbol{f}$ (*si elle existe*).

La dérivée

Dérivées d’ordre supérieur

Exemple

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5$
    - La dérivée première de f est : $f'(x) = 5x^4$.
    - La dérivée seconde de f est : $f''(x) = 20x^3$.
    - La dérivée troisième est : $f^{(3)}(x) = 60x^2$.
    - La dérivée quatrième est : $f^{(4)}(x) = 120x$.
    - La dérivée cinquième est : $f^{(5)}(x) = 120$.
    - La dérivée $n^{ième}$ pour $n > 5$ est : $f^{(n)}(x) = 0$

La dérivée

Étude des variations d'une fonction

Proposition 13

- Soit f définie et dérivable sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
  - Si $f'(x) > 0$ sur I, alors :

    f est strictement croissante sur I;
  - Si $f'(x) < 0$ sur I, alors :

    f est strictement décroissante sur I;

La dérivée

Étude des variations d’une fonction

Solution (Exemple 1)

2. **Interprétation géométrique :**

Pour $f(x) = x^2$, on a trouvé que : $f'(x_0) = 2x_0$.

- Si $x_0 < 0$, alors : $f'(x_0) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
- Si $x_0 > 0$, alors : $f'(x_0) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

La dérivée

Dérivées des fonctions usuelles

D_f	$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$

La dérivée

Règle de l'Hospital

Proposition 14 : 1ère version du Règle de l'Hospital

- Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I contenant x_0, avec $f(x_0) = g(x_0) = 0$, et si $g'(x_0) \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Exemple :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{15 + x} - 4}{x - 1}$$

❑ La dérivée

Règle de l'Hospital

Solution :

- Soient : $f(x) = \sqrt{15+x} - 4$ et $g(x) = x - 1$
- On a : $f(1) = \sqrt{15+1} - 4 = 0$ et $g(1) = 1 - 1 = 0$
- Or : $g'(1) = 1 \neq 0$
- Ainsi, on peut appliquer la règle de l'Hospital, avec :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{15+x}} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = 1$$

- Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{15+x}-4}{x-1} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{1}{2\sqrt{15+1}} = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$

La dérivée

Règle de l'Hospital

Proposition 15 : 2ème version du Règle de l'Hospital

- Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I contenant x_0, sauf éventuellement en x_0, avec $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x_0) = 0$.

- Si $g'(x_0) \neq 0$, et si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \ell$, alors :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \ell \text{ , que } \ell \text{ soit fini ou infini.}$$

❑ La dérivée

Application de la dérivée en économie

Fonctions marginales : Revenu marginal

Le revenu marginal est la variation de revenu due à une augmentation de la production vendue en une unité.

- Mathématiquement, le revenu marginal $\boldsymbol{R_m}$ est la dérivée du revenu total $\boldsymbol{R_t(Q)}$ par rapport à la quantité produite $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{R_m = \frac{d(R_t)}{dQ}}$$

La dérivée

Application de la dérivée en économie

Fonctions marginales : Revenu marginal

- La fonction du revenu est définie par : $\boldsymbol{R_t(Q) = PQ}$

Avec : $\boldsymbol{P}$ est le prix du bien; $\boldsymbol{Q}$ est la quantité demandée.

- Supposons que le prix est donnée par : $\boldsymbol{P = 100 - 2Q}$
- Donc : $\boldsymbol{R_t(Q) = PQ = (100 - 2Q)Q = 100Q - 2Q^2}$
- Ainsi, le revenu marginal est égal à :

$$\boldsymbol{R_m = \frac{d(R_t)}{dQ} = \frac{d(100Q - 2Q^2)}{dQ} = 100 - 4Q}$$

❑ La dérivée

Application de la dérivée en économie

Fonctions marginales : Revenu marginal

- On a : $$R_m = 100 - 4Q$$
- Si la quantité demandée est : $Q = 15$, alors :

Valeur exacte de R_m

$$R_m = 100 - 4(15) = 40$$

- Selon la définition du revenu marginal, « c'est la variation du R_t due à une augmentation de 1 unité de la quantité demandée Q ».
- Autrement dit, c'est :

Valeur approchée de R_m

$$\Delta R_t = (100(16) - 2(16)^2) - (100(15) - 2(15)^2) = 38$$

❑ La dérivée

Application de la dérivée en économie

Fonctions marginales : Revenu marginal

- **Interprétation graphique :**

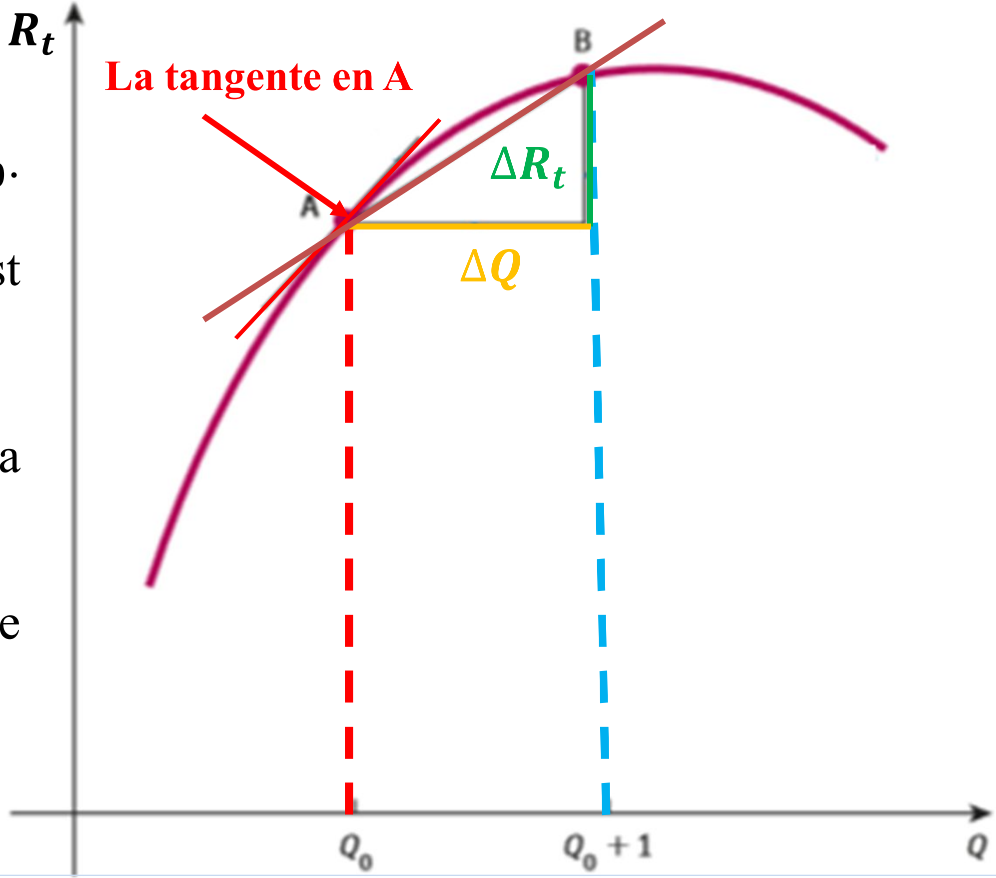
Le point **A** correspond à une quantité $\boldsymbol{Q_0}$.

La valeur exacte de $\boldsymbol{R_m}$ à ce point est donnée par la dérivée : $\dfrac{d(R_t)}{dQ}$.

Ce qui correspond à la pente de la tangente en A.

Le point **B** correspond à une augmentation de 1 unité de $\boldsymbol{Q}$.

La pente de **AB** est : $\dfrac{\Delta R_t}{\Delta Q} = \dfrac{\Delta R_t}{1} = \Delta R_t$



Etude locale et globale

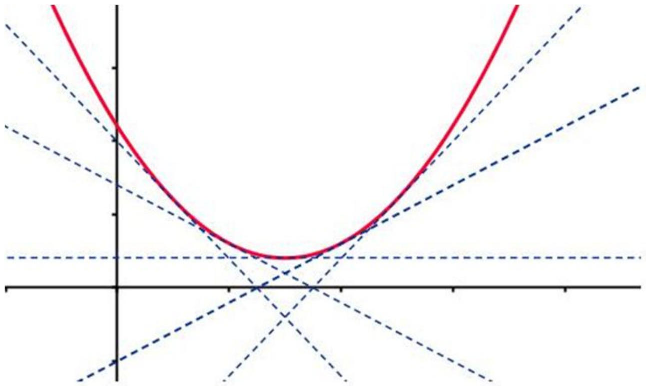
Que deviendrait le profit d’une entreprise si elle augmentait un peu son prix? Et quel sera le prix idéal d’un nouveau produit lancé?

❑ Etude locale et globale

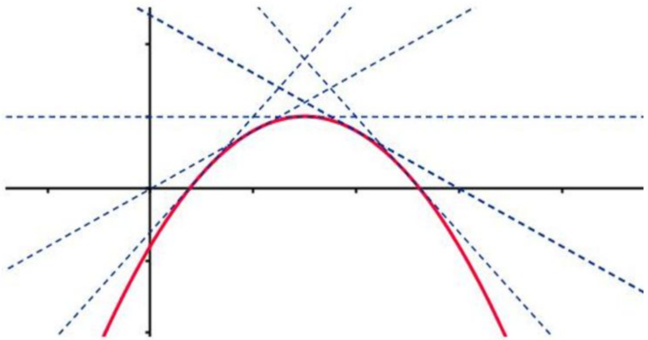
Convexité - Concavité

Corollaire 1

- Si f est deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I, alors :
  - f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$
  - f est concave sur I $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in I$



fonction convexe



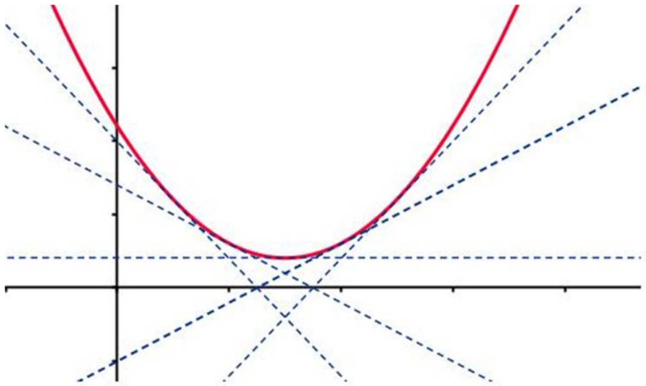
fonction concave

❑ Etude locale et globale

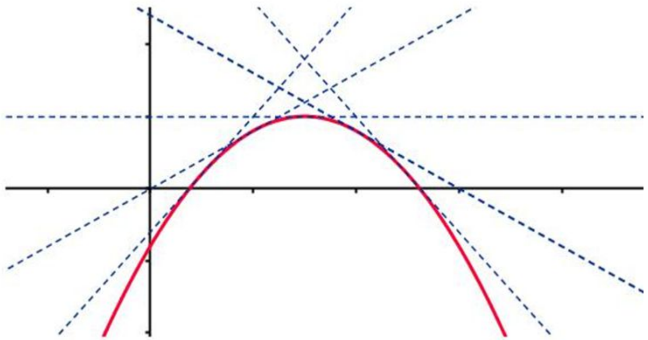
Convexité - Concavité

Théorème 1

- Si f est dérivable sur un intervalle I, alors :
  - f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ f' est croissante sur I
  - f est concave sur I $\Leftrightarrow$ f' est décroissante sur I



fonction convexe



fonction concave

❑ Etude locale et globale

Convexité - Concavité

Exemple

Étudier la concavité de la fonction : $f(x) = 5x - 7x^2$

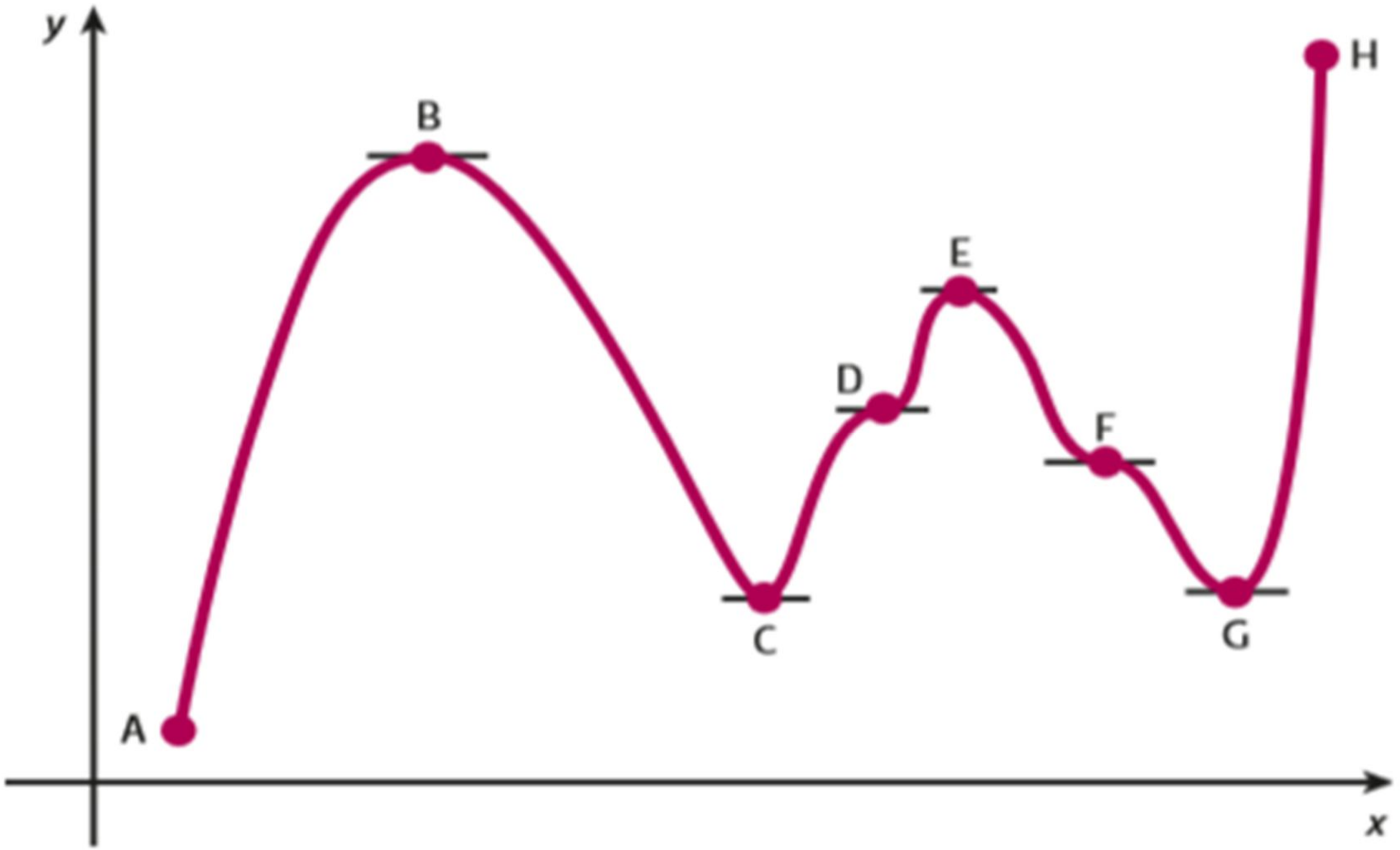
Solution

Calculons la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction f *:*

- *On a :* $f'(x) = 5 - 14x$
- *Ainsi :* $f''(x) = -14$
- *Comme* $f''(x) < 0$ *Alors la fonction* f *est concave.*

❑ Etude locale et globale

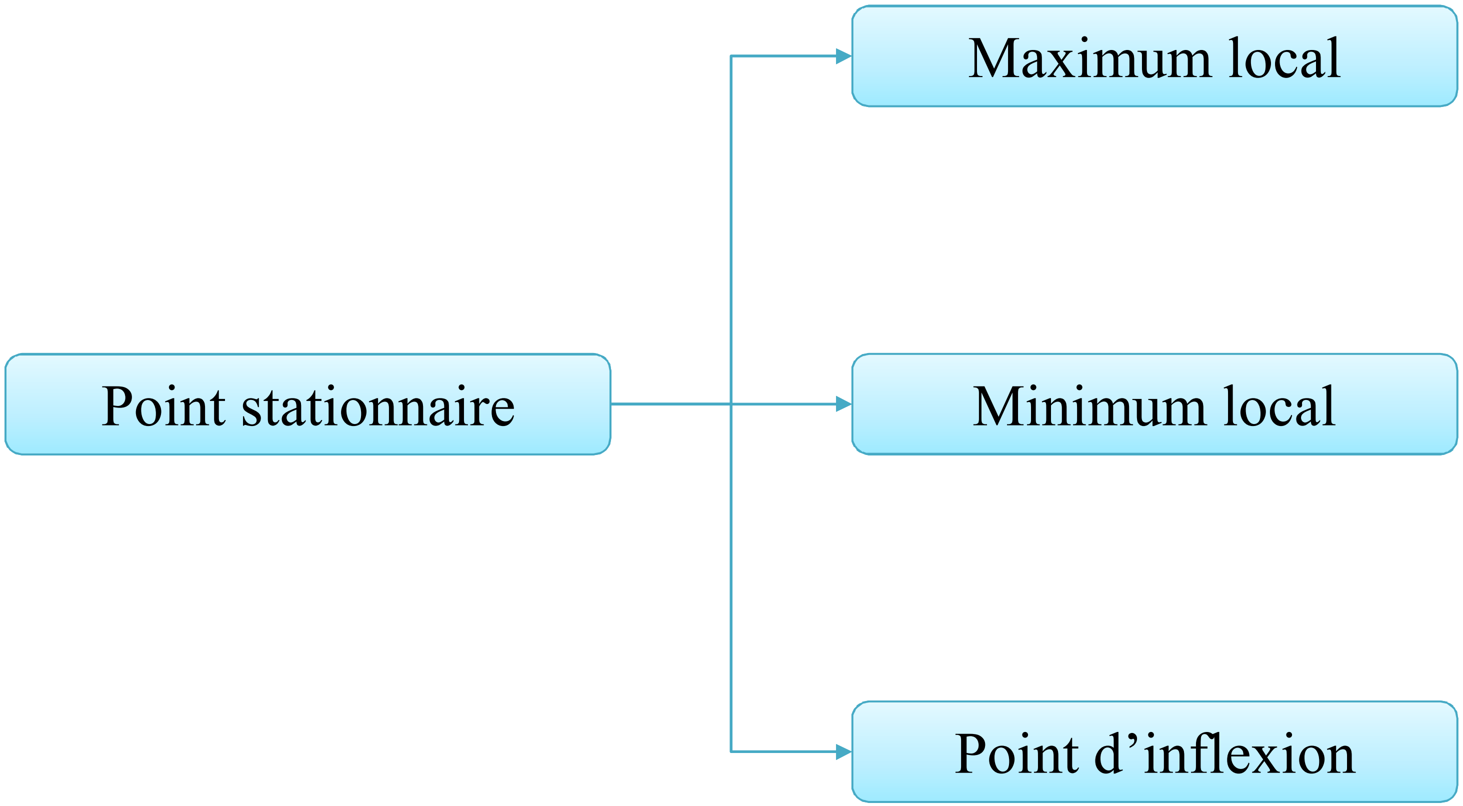
Extrema



Points stationnaires – Points critiques - Extrema

Etude locale et globale

Extrema

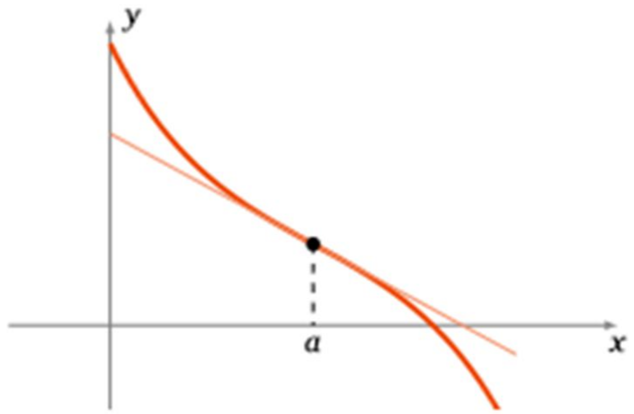


Etude locale et globale

Extrema

Définition

- Un point d'inflexion est un point où la courbure de la fonction change de signe.
- En un point d'inflexion, la tangente traverse la courbe.



Proposition 1

- Si en un point $x_0 \epsilon I$, f'' s'annule en changeant de signe, alors le point $M(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

❑ Etude locale et globale

Extrema

Proposition 2

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$, et soit $\boldsymbol{x_0 \epsilon\ I}$.
- Si $\boldsymbol{f'}$s'annule en $\boldsymbol{x_0}$ en changeant de signe en ce point alors $\boldsymbol{f}$ a un extremum local en $\boldsymbol{x_0}$.

Théorème 2

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$, et soit $\boldsymbol{x_0 \epsilon\ I}$.
- Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable en $\boldsymbol{x_0}$ et si $\boldsymbol{f}$ a un extremum local en $\boldsymbol{x_0}$ alors $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.

Attention : La réciproque de ce théorème est fausse.

Etude locale et globale

Extrema

Proposition 3

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \epsilon I$.
- Si f est **concave** sur I, et si $f'(x_0) = 0$ alors f admet un **maximum global** en x_0 (et il est unique si f est strictement concave).
- Si f est **convexe** sur I, et si $f'(x_0) = 0$ alors f admet un **minimum global** en x_0 (et il est unique si f est strictement convexe).

❑ Etude locale et globale

Extrema

Proposition 4

- Soit f deux fois dérivable sur l'intervalle I, et soit $x_0 \epsilon\, I$.
  - Si x_0 est un **maximum local**, alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \leq 0$.
  - Si x_0 est un **minimum local**, alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$.

Proposition 5

- Soit f deux fois dérivable sur l'intervalle I, et soit $x_0 \epsilon\, I$.
  - Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un **maximum local** strict de f.
  - Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un **minimum local** strict de f.

Etude locale et globale

Extrema

Proposition 6

- Si f est une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
- Alors :

f admet un **maximum global** et un **minimum global** sur I.

Etude locale et globale

Extrema

f est **concave** sur $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ alors f admet un **maximum global** en $\boldsymbol{x_0}$ (et il est unique si f est strictement concave).

Exemple

Étudier la nature des points stationnaires de : $f(x) = 5x - 7x^2$

Solution

- *On a :* $f'(x) = 5 - 14x$
- *Et :* $f''(x) = -14$
- *Les points stationnaires sont la solution de l'équation :* $\boldsymbol{f'(x) = 0}$
- *Ainsi :* $5 - 14x = 0$
- *Alors :* $x = \frac{5}{14}$
- *Or :* $f''\left(\frac{5}{14}\right) = -14$
- *Donc :* $f''\left(\frac{5}{14}\right) < 0$
- *Par conséquent, la fonction f a un* ***maximum global*** *au point* $\boldsymbol{x = \frac{5}{14}}$

❑ Etude locale et globale

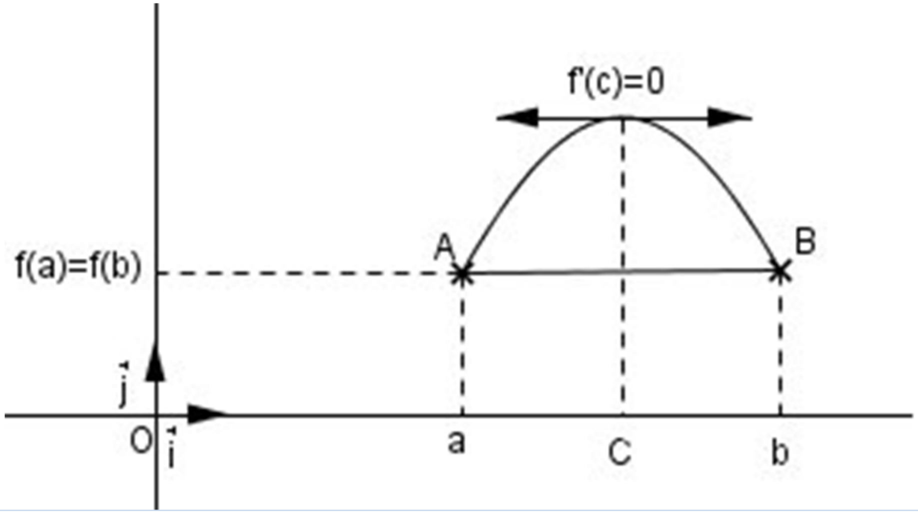
Accroissement finis

Théorème de Rolle

- Soit $\boldsymbol{f}$ dérivable sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$ de $\mathbb{R}$, et soient $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{I}$ avec $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$.

- Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$, alors : $\exists\ \boldsymbol{c} \in \left]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\right[$ tel que $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$.

Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$, alors il existe un point $\boldsymbol{c}$ compris entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ tel que la tangente soit horizontale en $\boldsymbol{c}$.



❑ Etude locale et globale

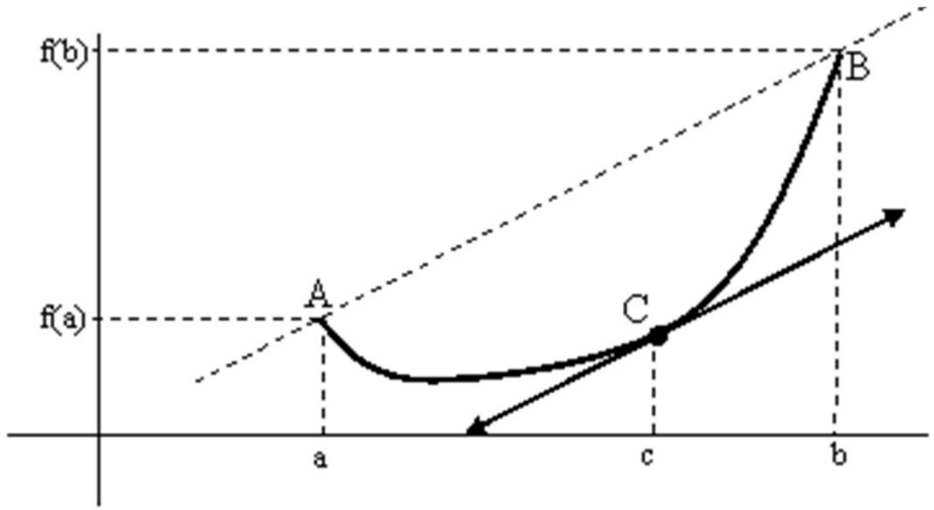
Accroissement finis

Théorème des accroissements finis

- Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et soient $a \in I$ et $b \in I$ avec $a < b$. Alors :

$$\exists\, c \in\,]a, b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si f est dérivable, alors il existe un point entre a et b tel que la tangente en ce point soit parallèle au segment AB.

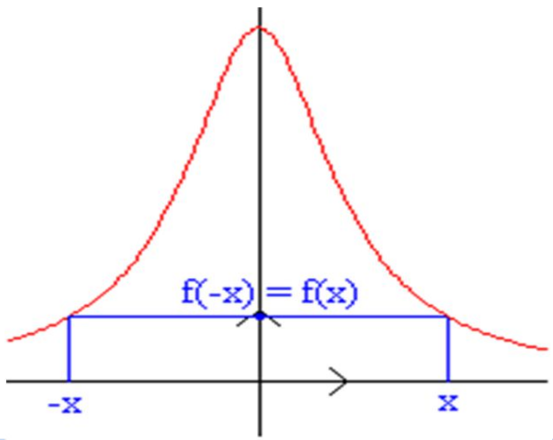


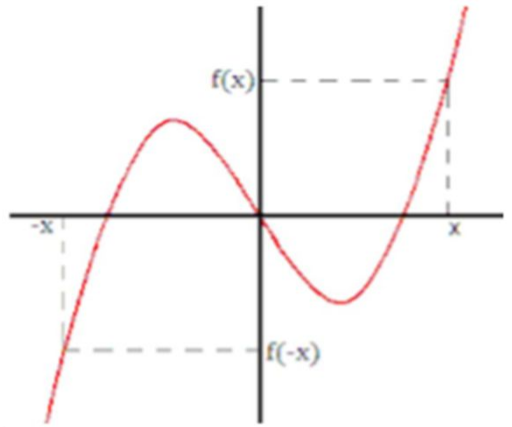
❑ Etude locale et globale

Symétrie

Proposition 7

- Soit f une fonction de courbe C_f dans le repère cartésien orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a :
  - f est paire ⟺ L'axe des ordonnées O_y est axe de symétrie de C_f.
  - f est impaire ⟺ L'origine O du repère est le centre de symétrie de C_f.





Etude locale et globale

Branches infinies - Asymptote

Proposition 8

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction réelle et $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$. On dit que le point $\boldsymbol{M(x, f(x))}$ décrit une **branche infinie** de $\boldsymbol{C_f}$ si l'une au moins de ses coordonnées est non bornée.
  - Si $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$, on dit que $\boldsymbol{C_f}$ admet une branche infinie dans la direction de la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax}$.
  - Si $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\boldsymbol{C_f}$ admet une branche parabolique de direction $\boldsymbol{O_y}$.

Branches infinies - Asymptote

Proposition 9

- S'il existe un couple (a, b) de nombres réels tel que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Alors :

La droite d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote à C_f en $\pm\infty$.

- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Alors :

La droite d'équation $x = x_0$ est dite asymptote à C_f.

Etude locale et globale

Branches infinies - Asymptote

Exemple

Soit la fonction f définie par :

$$\boldsymbol{f(x) = x + \frac{1}{x-2}}$$

Déterminer les asymptotes à $\boldsymbol{C_f}$

Etude locale et globale

Branches infinies - Asymptote

$$f(x) = x + \frac{1}{x-2}$$

Solution

- Il faut calculer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en $x_0=2$.
- Alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote (oblique) à C_f en $\pm\infty$.

- On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

Donc la droite verticale d'équation $x = 2$ est asymptote à C_f.

Etude locale et globale

Tableau de variation

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	0	+		+	0	-		-	
$f''(x)$		-	0	+		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$			p.in		min		p.in		max		p.in		

❑ Etude locale et globale

Optimisation d’une fonction en économie

Exemple

- L’équation de la demande d’un bien est définie par :

$$P + Q = 50$$

- Sachant que le revenu total est défini par :

$$R_t = PQ$$

Trouver la valeur de la demande Q qui maximise le revenu total.

❑ Etude locale et globale

Optimisation d'une fonction en économie

Solution

- On doit premièrement écrire la fonction du revenu total en fonction seulement de la variable $\boldsymbol{Q}$, donc : $\boldsymbol{R_t = PQ = (50 - Q)Q = 50Q - Q^2}$
- Dérivons $\boldsymbol{R_t}$ par rapport à $\boldsymbol{Q}$, Ainsi : $\boldsymbol{\frac{dR_t}{dQ} = \frac{d(50Q - Q^2)}{dQ} = 50 - 2Q}$
- Cherchons la solution de l'équation : $\boldsymbol{50 - 2Q = 0}$. Alors : $\boldsymbol{Q = 25}$
- Calculons la dérivée seconde de $\boldsymbol{R_t}$: $\boldsymbol{\frac{d^2R_t}{dQ^2} = \frac{d(50 - 2Q)}{dQ} = -2}$.
- Comme $\boldsymbol{\frac{d^2R_t}{dQ^2} < 0}$, on déduit que $\boldsymbol{R_t}$ à un maximum en $\boldsymbol{Q = 25}$.

❑ Etude locale et globale

Formule de Taylor

Théorème : Formule de Taylor-Lagrange

- On considère une fonction $\boldsymbol{f}$ qui est $\boldsymbol{n}$ fois dérivable sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$ de $\mathbb{R}$.
- Soient a, b dans $\boldsymbol{I}$, avec $a < b$.
- Alors, $\exists\ \boldsymbol{c} \in\ ]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tel que :

$$\boldsymbol{f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(b-a)^{n}}$$

Etude locale et globale

Formule de Taylor

Théorème : Formule de Taylor-Young

- On suppose : $\exists\ \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ tel que f est de classe $\boldsymbol{C^n}$ sur $]\ \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\alpha}[$.
- Alors, il existe une fonction $\boldsymbol{\varepsilon}$ définie de $]-\boldsymbol{\alpha}; +\boldsymbol{\alpha}[$ dans $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{h}) = \mathbf{0}$, telle que, $\forall\ \boldsymbol{h} \in]-\boldsymbol{\alpha};\ +\boldsymbol{\alpha}[$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)h^n + h^n \varepsilon(h)$$

Définition

- On dit qu’une fonction f d’un intervalle $\boldsymbol{I}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\boldsymbol{C^n}$ si elle est $\boldsymbol{n}$ fois dérivable sur $\boldsymbol{I}$, et que sa dérivée $\boldsymbol{n^{ième}}$ est continue.
- On dit que f est de classe $\boldsymbol{C^\infty}$ si elle est dérivable $\boldsymbol{n}$ fois $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$.

Développements limités

Définition

- On dit que f admet un **développement limité (DL)** d'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si il existe $\alpha > 0$, il existent des constantes réelles a_0, a_1, ..., a_n et il existe une fonction ε définie de $]-\alpha; +\alpha[$ dans $\mathbb{R}$, avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, tels que, $\forall\, h \in]-\alpha;\ +\alpha[$:

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

Une fonction f admet un **développement limité** d'ordre n au voisinage d'un point x_0 si elle peut être approximée par un polynôme de degré n au voisinage de ce point.

Développements limités

Proposition 1

- Si f est de classe C^n dans un intervalle $]\, x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$, alors f admet un développement limité d'ordre n en x_0.

Proposition 2

Si f et g ont un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 alors :

- la fonction $f + g$ admet aussi un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0. On l'obtient en additionnant les DL de f et de g.
- la fonction $f \times g$ admet aussi un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0. On l'obtient en multipliant les DL de f et de g, et en gardant uniquement les termes de degré inférieur ou égal à n.

Etude locale et globale

Développements limités

Développements limités usuels

e^x	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$
$ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$

Intégrales

À partir du coût marginal, comment peut-on calculer le coût total?

❑ Intégrales

En mathématiques, il y a de nombreuses paires d'opérations dont une annule l'autre et nous ramènent au point de départ.

$5x+11 \Leftrightarrow 6 \times \dfrac{5x+11}{6}$

$F\ ? \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Exemple

$$F(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = 2x = f(x)$$

Primitive de f $\xrightarrow{\text{Notation}}$ $F(x) = \int f(x)dx$ Intégrale de f

❑ Intégrales

- Intégrale
  - Intégrale indéfinie
  - Intégrale définie
  - Intégrale impropre

❑ Intégrales

Intégrale indéfinie

Exemple explicatif

$$F(x) = x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad F'(x) = 2x = f(x)$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 2xdx = x^2$$

Remarquons que : $x^2 + 62$ *et :* $x^2 - 14$ *et :* $x^2 + 8$

sont également des primitives de la fonction : $2x$

Donc :

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Constante d'intégration

Intégrales

Intégrale indéfinie

Définition 1

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de la fonction f sur I si F est dérivable sur I et si :

$$\forall\, x \in I \qquad F'(x) = f(x)$$

Remarque

- Comme F est dérivable sur I alors la fonction F est en particulier continue sur I.

❑ Intégrales

Intégrale indéfinie

Théorème 1

- Toute fonction est continue sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ admet au moins une primitive sur $\boldsymbol{I}$.
- Si $\boldsymbol{F}$ est une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$ alors toute autre primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$ est de la forme $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{c}$ où $\boldsymbol{c}$ est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$ qui prend une valeur donnée en un point donné, autrement dit :

Si $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$ *et* $\boldsymbol{y_0} \in \mathbb{R}$ *alors :*

Il existe une unique primitive $\boldsymbol{F_0}$ *de* $\boldsymbol{f}$ *sur* $\boldsymbol{I}$ *vérifiant :* $\boldsymbol{F_0(x_0) = y_0}$

❑ Intégrales

Intégrale indéfinie

Exemple applicatif

Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F(2) = 7$ de $f(x) = 8x - 9$

Solution

f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

$$\int f(x)dx = \int (8x-9)dx = 4x^2 - 9x + c \quad avec \quad c \in \mathbb{R}$$

$$F(2) = 7 \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + c = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 4(2)^2 - 9(2) + c = 7$$

$$\Leftrightarrow c = 7 - 16 + 18 \Leftrightarrow c = 9$$

Donc : $\boldsymbol{F(x) = 4x^2 - 9x + 9}$

❑ Intégrales

Intégrale indéfinie

Primitives usuelles

Fonction	Primitive
$A\ \ (constante)$	$Ax + c$
$x^n\ \ (n \in \mathbb{R} - \{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1 + \mathrm{tg}^2\, x$	$\mathrm{tg}\, x$

❑ Intégrales

Intégrale indéfinie

Application en économie : Coût marginal

La fonction du coût marginal d'une entreprise est définie par :

$$C_m(Q) = 2Q^2 + 5Q + 3$$

Trouver la fonction du coût total si les coûts fixes sont 75.

❑ Intégrales

Intégrale indéfinie

Application en économie : Coût marginal

On sait que : $$C_m(Q) = \frac{d(C_t(Q))}{dQ}$$

Donc : $$C_t(Q) = \int C_m(Q)dQ = \int (2Q^2 + 5Q + 3)dQ$$

Ainsi : $$\boldsymbol{C_t(Q) = \frac{2}{3}Q^3 + \frac{5}{2}Q^2 + 3Q + c}$$

Les coûts fixes correspondent à la valeur de $\boldsymbol{C_t}$ *lorsque* $\boldsymbol{Q = 0}$ *:*

$$C_t(0) = 75 \iff \frac{2}{3}0^3 + \frac{5}{2}0^2 + 3(0) + c = 75 \iff \boxed{c = 75}$$

La constante d'intégration est donc égale aux coûts fixes de production, donc c = 75. D'où : $\boldsymbol{C_t(Q) = \frac{2}{3}Q^3 + \frac{5}{2}Q^2 + 3Q + 75}$

❑ Intégrales

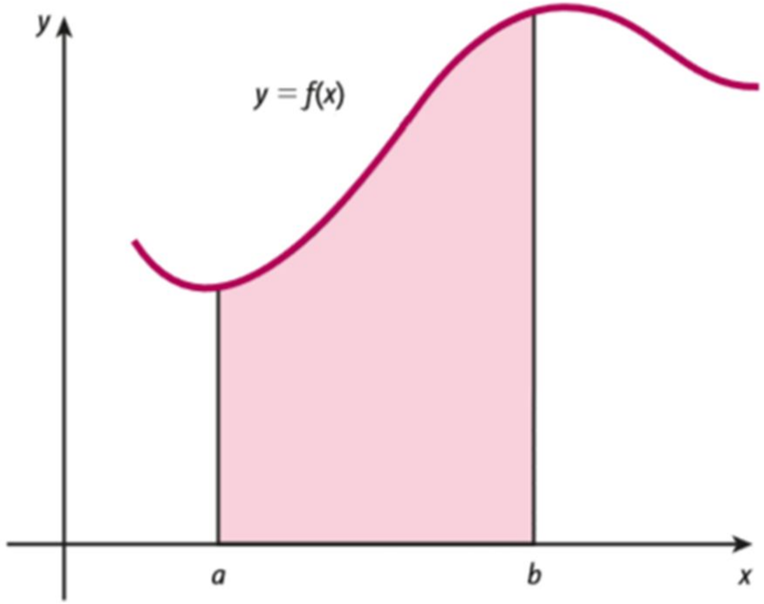
Intégrale définie

Définition 2

- Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
- On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est **l'intégrale** de f sur $[a, b]$.

Interprétation géométrique

L'intégrale est la surface délimitée par la courbe de la fonction f, les droites x=a et x=b et l'axe des abscisses.



❑ Intégrales

Intégrale définie

Définition 3

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
- On appelle **intégrale de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ de la fonction $\boldsymbol{f}$** le réel $F(b) - F(a)$, et on note :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

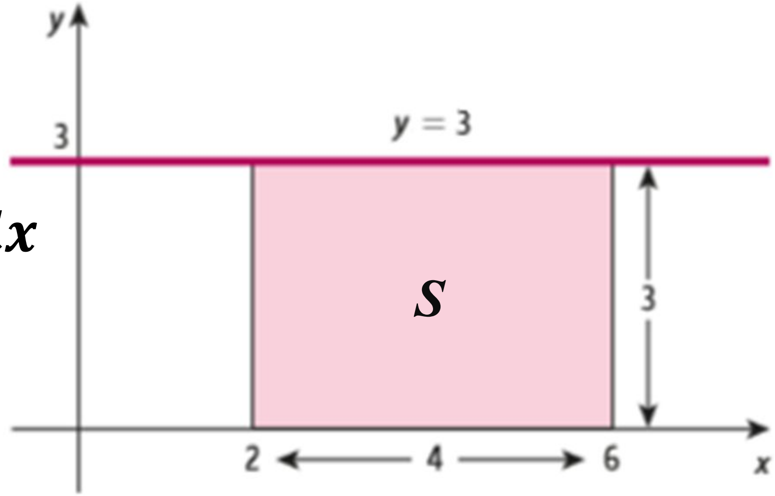
Où F est une primitive quelconque de f.

- On écrit aussi :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

❑ Intégrales

Intégrale définie



Exemple

Calculer l’intégrale suivante : $\int_2^6 3dx$

Solution

$$\int_2^6 3dx = [3x]_2^6 = 3(6) - 3(2) = 12$$

La surface du rectangle (S) est définie par :

$$S = Longueur \times Largeur$$

Donc : $S = 3 \times 4 = 12$

Intégrales

Intégrale définie

Théorème 2: Relation de Chasles

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a, b, c \in I$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Conséquences

- A partir de la relation de Chasles on déduit que :

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Intégrales

Intégrale définie

Théorème 3

- Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions continues sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ avec $a, b \in I$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  Alors :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

En terme de primitives :

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

❑ Intégrales

Intégrale définie

Proposition 1

- Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ $(a \leq b)$ telles que : $f(x) \leq g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$. Alors :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx$$

- Si $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur $[a, b]$ $(a \leq b)$, alors :

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq \int_{a}^{b} |f(x)|dx$$

❑ Intégrales

Intégrale définie

Théorème 4 : Théorème de la moyenne

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Théorème 5 : Positivité

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur $[a, b]$ $(a \leq b)$ telle que : $\forall\, x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$. Alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

❑ Intégrales

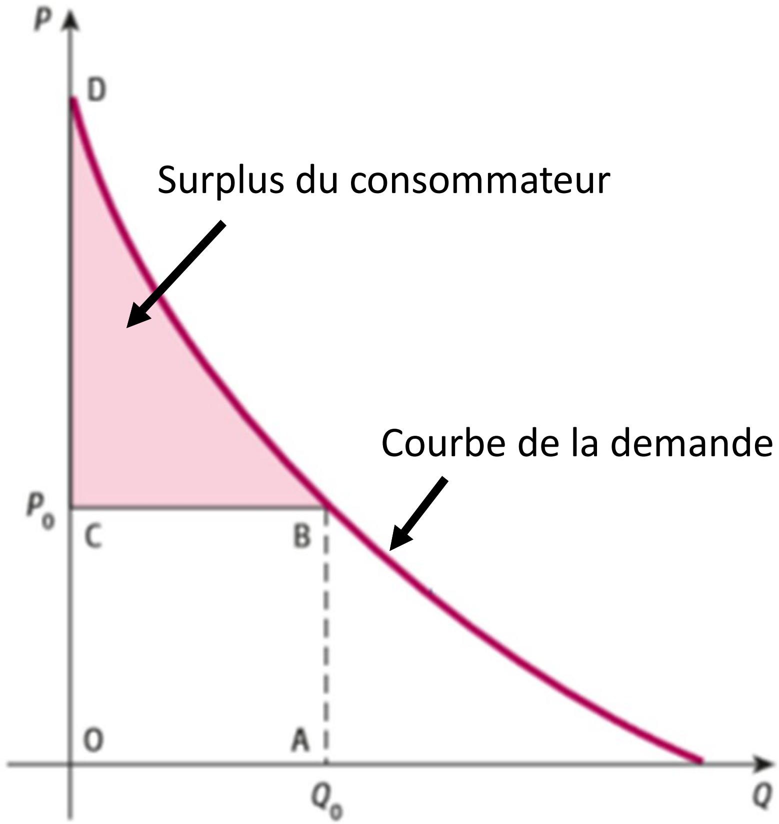
Intégrale définie

Application en économie : Le surplus du consommateur

- Soit la fonction de demande, $\boldsymbol{P = f(Q)}$, illustrée ci-contre.

1) Donner la formule permettant de calculer le surplus du consommateur $\boldsymbol{S_c}$ à partir de cette figure.

2) Quel sera le surplus du consommateur à $\boldsymbol{Q_0 = 5}$ sachant que : $\boldsymbol{P = 30 - 4Q}$?



❑ Intégrales

Intégrale définie

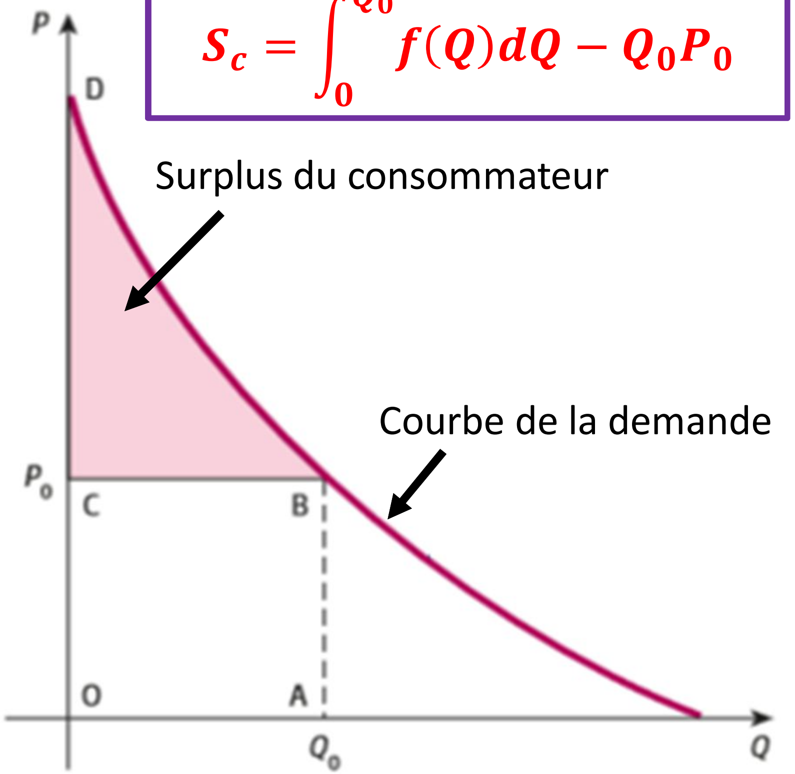
Application en économie : Le surplus du consommateur

$$S_c = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - Q_0P_0$$

1) Le surplus du consommateur est l'aire de BCD, telle que :

$$A(BCD) = A(OABD) - A(OABC)$$

- Or, OABD est l'aire délimitée par la courbe, $Q = 0$ et $Q = Q_0$. Donc, elle est égale à : $\int_0^{Q_0} f(Q)dQ$.
- La région OABC est un rectangle dont l'aire est égale à : Q_0P_0.



❑ Intégrales

Intégrale définie

Application en économie : Le surplus du consommateur

2) On a : $\boldsymbol{f(Q) = 30 - 4Q}$

- Et $Q_0 = 5$, alors : $\boldsymbol{P_0 = 30 - 4(5) = 10}$
- Donc :

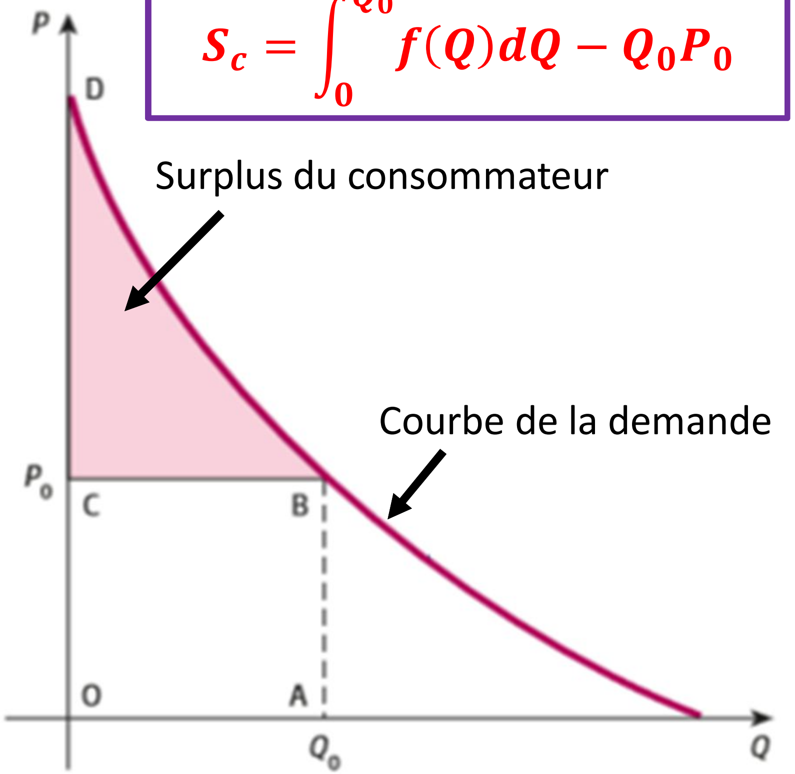
$$S_c = \int_0^5 (30 - 4Q)dQ - Q_0 P_0$$

$$S_c = [30Q - 2Q^2]_0^5 - (5 \times 10)$$

$$S_c = [30(5) - 2(5)^2] - 0 - 50$$

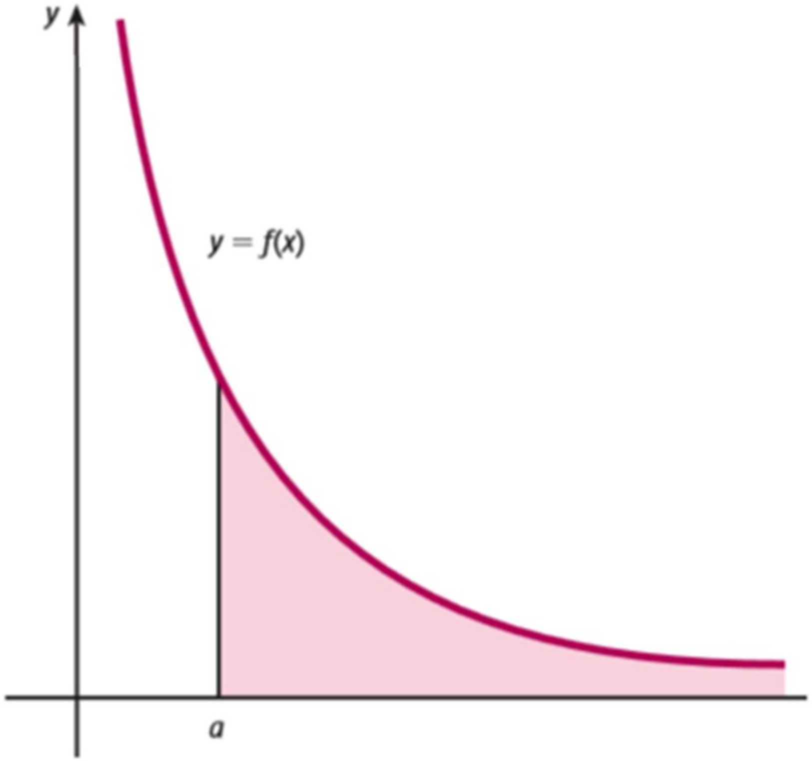
$$\boldsymbol{S_c = 50}$$

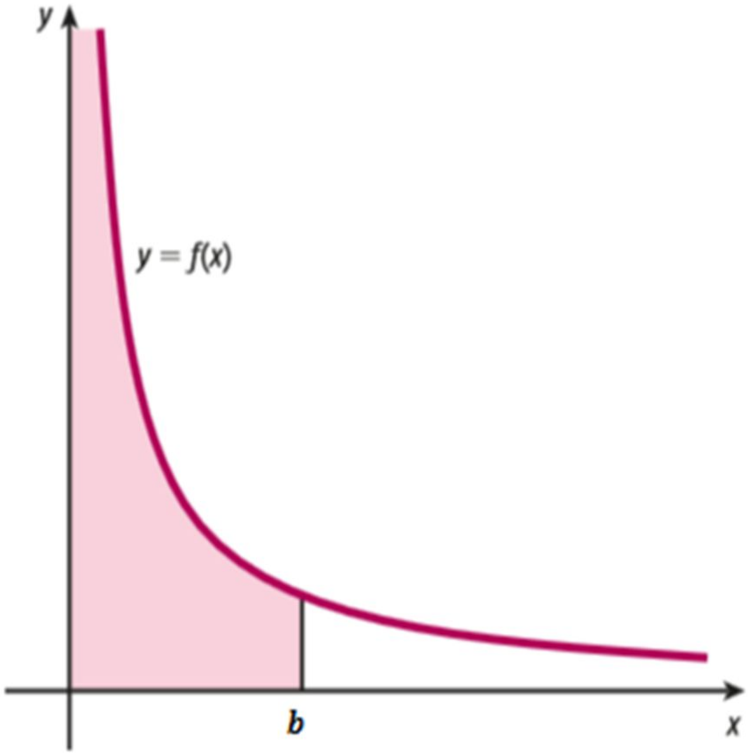
$$\boldsymbol{S_c = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - Q_0 P_0}$$



Intégrales

Intégrale impropre (généralisée)





$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad\qquad \int_{0}^{b} f(x)dx$$

❑ Intégrales

Intégrale impropre (généralisée)

Définition 4

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonctions continue sur un intervalle $[a, +\infty[$.
- $\forall\, b \geq a$, on pose : $\boldsymbol{F(b) = \int_a^b f(x)dx}$.
- Si $\boldsymbol{F(b)}$ a une limite finie quand $\boldsymbol{b}$ tend vers $+\infty$, alors on dit que $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx}$ existe ou ***converge***, et on définit :

$$\int_a^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{\boldsymbol{b}\to+\infty} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx}$$

- Si $\boldsymbol{F(b)}$ n'a pas de limite finie, on dit que $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx}$ n'existe pas ou ***diverge***.

❑ Intégrales

Intégrale impropre (généralisée)

Exemple

Calculer : $$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

Solution

- On va commencer par trouver l'aire finie sous la courbe $y = x^{-3}$ de $x = 1$ à $x = N$:

$$\int_{1}^{N} x^{-3} dx = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{1}^{N} = -\frac{1}{2}N^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N^2}$$

- A partir de la définition :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2N^2}\right) = \frac{1}{2}$$

❑ Intégrales

Intégrale impropre (généralisée)

Définition 5

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonctions continue sur un intervalle $]0, a]$.
- On pose : $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$.
- Si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ a une limite finie quand $\boldsymbol{a}$ tend vers 0, alors on dit que $\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ existe ou ***converge***, et on définit :

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \lim_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{0}} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

- Si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ n'a pas de limite finie, on dit que $\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ n'existe pas ou ***diverge***.

❑ Intégrales

Intégrale impropre (généralisée)

Exemple

Calculer : $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solution

- On va commencer par trouver l'aire finie sous la courbe $y = x^{-\frac{1}{2}}$ de $x = 0$ à $x = 1$:

$$\int_N^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_N^1 = 2 - 2\sqrt{N}$$

- A partir de la définition :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{N\to 0}\left(2 - 2\sqrt{N}\right) = 2$$

3 Fonctions réelle à deux variables

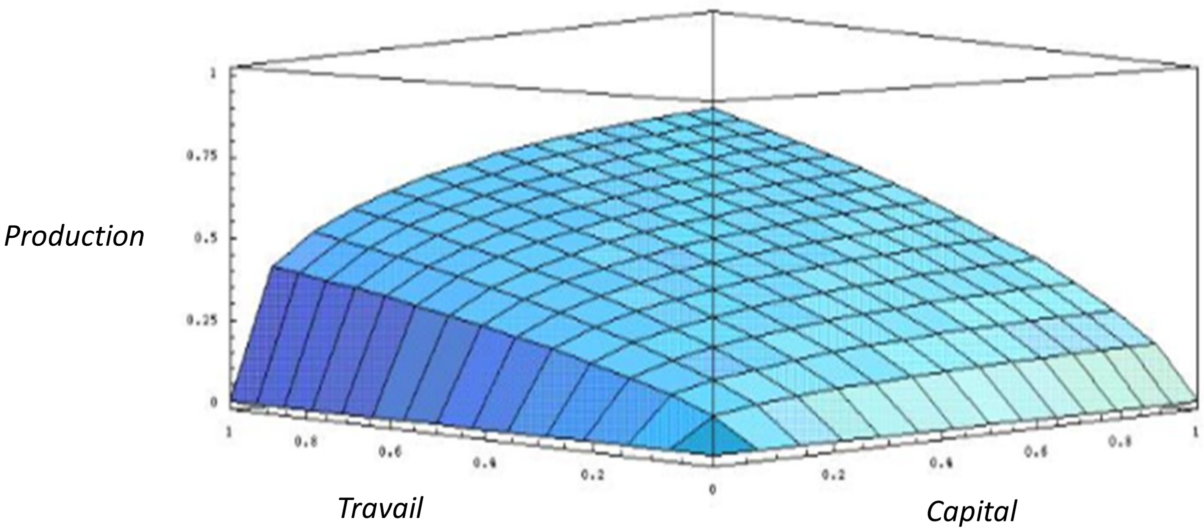
3 Fonctions réelle à deux variables

❑ Introduction

La plupart des variables économiques dépend de deux variables ou plus.

Fonction de production : $Q = f(K, L)$

Fonction de Cobb-Douglas : $q = AK^{\alpha}L^{\beta}$



3 Fonctions réelle à deux variables

❑ Définition

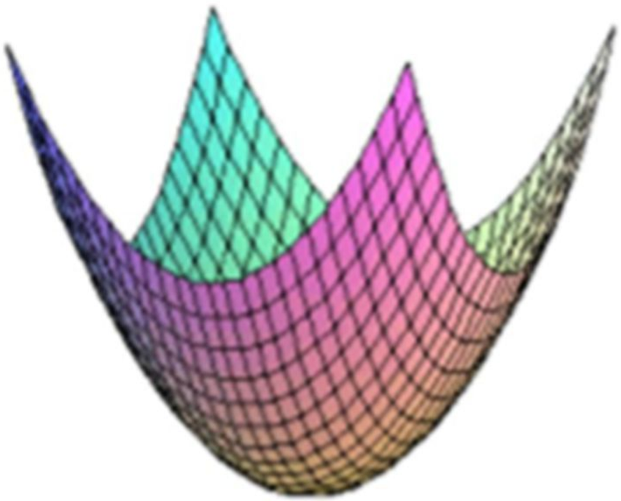
- Une fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur un sous-ensemble $\boldsymbol{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ s'appelle fonction numérique à deux variables.
- $\boldsymbol{D}$ est le domaine de définition de $\boldsymbol{f}$.
- L'image de $\boldsymbol{f}$ est : $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) /\ \boldsymbol{X} \epsilon \boldsymbol{D}\}$.
- Le graphe de $\boldsymbol{f}$ est défini par : $\{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})) /\ \boldsymbol{X} \epsilon \boldsymbol{D}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Remarque

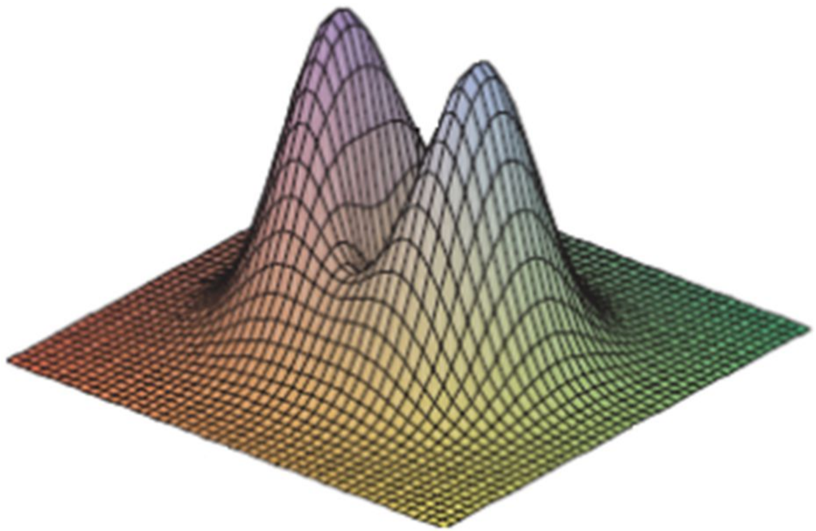
- *La variable **X** est un vecteur : X = (x, y)*
- *Les variables d'entrée sont appelées variables indépendantes (exogènes), et la variable de sortie est appelée variable dépendante (endogène).*

❑ Définition

Exemple



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$



$$f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$$

3 Fonctions réelle à deux variables

❑ Continuité

- Le concept de continuité pour les fonctions d'une variable peut être généralisé à des fonctions de deux variables.

Définition

- En bref, une fonction de deux variables est continue si de petits changements dans les variables indépendantes induisent de petits changements dans la valeur de la fonction.

Continuité

Proposition

- Toute fonction de deux variables pouvant être construite à partir de fonctions continues en combinant les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de composition fonctionnelle est continue, quelle que soit sa définition.

Exemple

- *La fonction :* $\boldsymbol{f(x,y) = x^2y + 8x^2y^5 - xy + 3x}$, *en tant que somme des produits de puissances positives, est définie et continue pour tout x et y.*

Limites

- On a la même notion de limite que pour une fonction d'une seule variable réelle. Ainsi, les propriétés habituelles des limites pour une seule variable seront généralisées pour une fonction à deux variables.

Exemple

- *Soit la fonction :* $f(x,y) = e^{\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)}$. *Calculons* $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y)$
- *On sait que :* $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} -\frac{1}{x^2+y^2} = -\infty$
- *Comme :* $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ *Donc :* $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} e^{\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)} = 0$

3 Fonctions réelle à deux variables

❑ Dérivée partielle d'ordre 1

Définition 1

- Soit $f:(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction à deux variables, les applications partielles associées sont les deux fonctions à une variable :

$$f_x : x \mapsto f(x,y) \quad \text{et} \quad f_y : y \mapsto f(x,y)$$

Définition 2

- Les dérivées partielles d'une fonction à deux variables sont les dérivées de ses applications partielles. On note : $\frac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée de f_x et $\frac{\partial f}{\partial y}$ celle de f_y.

Dérivée partielle d'ordre 1

Exemple

- *Donner les dérivées partielles de la fonction :*

$$\boldsymbol{f(x,y) = 5y^2 + xy - 15x}$$

Solution

- *La fonction f est une fonction de 2 variables. Donc, on aura deux dérivées partielles :*

$$f'_x = y - 15$$

$$f'_y = 10y + x$$

❑ Dérivée partielle d'ordre 2

Définition 3

- Les quatre dérivées partielles des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (deux pour chaque fonction) sont appelées dérivées partielles secondes – ou d'ordre 2 – de la fonction f.

- On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ les dérivées partielles par rapport à x et y de $\frac{\partial f}{\partial x}$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Dérivée partielle d'ordre 2

Théorème de SCHWARTZ

- Soit $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

- Si les dérivées partielles secondes f''_{xy} et f''_{yx} sont continues au voisinage de $M_0(x_0, y_0)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0)$$

❑ Dérivée partielle d'ordre 2

Théorème de SCHWARTZ

Exemple

- *Donner les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction :*

$$\boldsymbol{f(x,y) = 5y^2 + xy - 15x}$$

Solution

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y - 15) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(10y + x) = 1}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y - 15) = 1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(10y + x) = 10$$

Fonctions homogènes

Définition

- On dit que $\boldsymbol{f}$ est homogène de degré $\boldsymbol{\lambda}$ sur $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^2$(avec $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$) si :

$$\forall\, \boldsymbol{t} > \boldsymbol{0}, \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{tx}) = \boldsymbol{t}^{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Exemple : Fonction de production Cobb-Douglas

- *La fonction de production Cobb-Douglas est définie par:* $\boldsymbol{f(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}}$ *est homogène de degré* $\boldsymbol{\lambda = \alpha + \beta}$ *sur* $\mathbb{R}_+^2$
- *On a :* $\boldsymbol{f(tK,tL) = A(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta} = At^{\alpha}K^{\alpha}t^{\beta}L^{\beta} = t^{\alpha+\beta}\underbrace{\boxed{AK^{\alpha}L^{\beta}}}_{f(K,L)}}$
- *Donc :* $\boldsymbol{f(tK,tL) = t^{\alpha+\beta} f(K,L)}$

Fonctions homogènes

Théorème d'Euler

- Si $\boldsymbol{f}$ est homogène de degré $\boldsymbol{\lambda}$ sur $\boldsymbol{U}$, on a en tout point $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ de $\boldsymbol{U}$ où $\boldsymbol{f}$ est différentiable :

$$\sum_{i=n}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lambda f(x)$$

Proposition : Réciproque du théorème d'Euler

- Si $\boldsymbol{f}$ est différentiable et vérifie $\boldsymbol{\lambda f(x) = \sum_{i=n}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}$ en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^{\boldsymbol{n}}$, alors $\boldsymbol{f}$ est homogène de degré $\boldsymbol{\lambda}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^{\boldsymbol{n}}$.

Fonctions homogènes

$$\sum_{i=n}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lambda f(x)$$

Exemple

- *On considère la fonction de production suivante :*

$$f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

- *On a démontré que* $\boldsymbol{f}$ *est homogène de degré* $\boldsymbol{\alpha + \beta}$ *Alors :*

$$K\frac{\partial f}{\partial K}(K, L) + L\frac{\partial f}{\partial L}(K, L) = (\alpha + \beta)f(x)$$

Démontrer en appliquant le théorème d'Euler

Différentielles

$$z = f(x_1, x_2)$$

Si x_1 varie d'une petite quantité Δx_1 et x_2 est maintenue fixe, alors la variation correspondante de z satisfait :

$$\Delta z \cong \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \Delta x_1$$

Si x_2 varie d'une petite quantité Δx_2 et x_1 est maintenue fixe, alors la variation correspondante de z satisfait :

$$\Delta z \cong \frac{\partial z}{\partial x_2} \times \Delta x_2$$

$$\Delta z \cong \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \times \Delta x_2 \Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} \times dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \times dx_2$$

Différentielles : elles représentent les valeurs limites de Δz, Δx_1 et Δx_2.

Différentielles

Exemple

- *Soit la fonction :*

$$z = x^3y - y^3x$$

1) *Trouver* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *au point (1,3).*

2) *Estimer la variation de* z *quand* x *augment de 1 à 1,1 et* y *diminue de 3 à 2,8 simultanément.*

Différentielles

Solution

1) *On a :* $$z = x^3y - y^3x$$

Alors : $$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3 \quad \text{et :} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x$$

Donc, au point (1,3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(1)^2(3) - (3)^3 = -18 \quad \text{et :} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (1)^3 - 3(3)^2(1) = -26$$

2) *On a :* $$\Delta x = 0,1 \quad \text{et :} \quad \Delta y = -0,2$$

Ainsi :

$$\Delta z \cong \frac{\partial z}{\partial x} \times \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \times \Delta y \cong (-18) \times (0,1) + (-26) \times (-0,2) \cong 3,4$$

Dérivation implicite

Étant donnée une fonction de la forme suivante : $y^3 + 2xy^2 - x = 5$

Comment peut-on trouver $\frac{dy}{dx}$?

En appliquant : $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \times dx + \frac{\partial z}{\partial y} \times dy$$

Comme $f(x, y)$ est une fonction constante :

$$f(x, y) = z = 5$$ Donc : $$dz = 0$$

Par conséquent :

$$\text{Si } f(x, y) \text{ est constante alors} : \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial z / \partial x}{\partial z / \partial y}$$

Dérivation implicite

Exemple

On a : $$y^3 + 2xy^2 - x = 5$$

Comme $f(x,y)$ est constante on peut appliquer la dérivation implicite :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y}$$

Or : $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 - 1$ et : $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 4xy$

Donc : $$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{2y^2 - 1}{3y^2 + 4xy}}$$

Application en économie

Exemple : Fonction de production

Étant donnée la fonction de production : $\boldsymbol{Q = 18K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{5}{6}}}$

1) Donner l'expression de la productivité marginale du travail.

2) Donner l'expression de la productivité marginale du capital.

3) Qu'elle sera la variation de la productivité marginale du travail si :

   a) Le travail augmente tant que le capital reste constant.

   b) Le capital augmente tant que le travail reste constant.

Application en économie

Solution : Fonction de production

La fonction de production est définie par : $\boldsymbol{Q = f(K, L) = 18K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{5}{6}}}$

1) La productivité marginale du travail $\boldsymbol{P_mL}$ correspond à la dérivée partielle de la fonction de production par rapport au travail, en considérant le capital constant :

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(18K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{5}{6}}\right) = 15K^{\frac{1}{6}}L^{-\frac{1}{6}}$$

Si le travail change légèrement $\boldsymbol{\Delta L}$, le capital étant maintenu constant, la variation correspondante de $\boldsymbol{Q}$ est donnée par : $\Delta Q \cong \frac{\partial Q}{\partial L} \times \Delta L$

Application en économie

Solution : Fonction de production

La fonction de production est définie par : $\boldsymbol{Q = f(K, L) = 18K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{5}{6}}}$

2) La productivité marginale du capital $\boldsymbol{P_mK}$ correspond à la dérivée partielle de la fonction de production par rapport au capital, en considérant le travail constant :

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(18K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{5}{6}}\right) = 3K^{-\frac{5}{6}}L^{\frac{5}{6}}$$

Si le capital change légèrement $\Delta\boldsymbol{K}$, le travail étant maintenu constant, la variation correspondante de $\boldsymbol{Q}$ est donnée par : $\Delta Q \cong \frac{\partial Q}{\partial K} \times \Delta K$

Application en économie

Solution : Fonction de production

3) La productivité marginale du travail P_mL est égale à :

$$P_mL = 15K^{\frac{1}{6}}L^{-\frac{1}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad P_mL = 15\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{6}}$$

a) Lorsque le travail augmente, en maintenant le capital constant, la productivité marginale du travail diminue.

b) Lorsque le capital augmente, en maintenant le travail constant, la productivité marginale du travail augmente.

Si K et L changent simultanément, alors la variation de Q est égale à :

$$\Delta Q \cong \frac{\partial Q}{\partial K} \times \Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L} \times \Delta L$$

Matrice hessienne

Définition

- On représente souvent les dérivées partielles d'ordre 2 sous forme d'une matrice $n \times n$ de la façon suivante :

$$f''(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & \cdots & f''_{2n} \\ & & & \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{pmatrix}$$

Elle est appelée ***la matrice hessienne*** de f à $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Matrice Hessienne

Définition

- Dans le cas de deux variables, les dérivées partielles d'ordre 2 se représentent sous forme d'une matrice 2×2 de la façon suivante :

$$f''(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Convexité - Concavité

Proposition

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction de classe $\boldsymbol{C}^2$définie sur un domaine $\boldsymbol{D}$ de $\mathbb{R}^2$.

1) La fonction $\boldsymbol{f}$ est convexe sur $\boldsymbol{D}$ si et seulement si sa matrice hessienne est semi-définie positive pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$.
2) La fonction $\boldsymbol{f}$ est concave sur $\boldsymbol{D}$ si et seulement si sa matrice hessienne est semi-définie négative pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$.
3) Si la matrice hessienne de $\boldsymbol{f}$ est définie positive (négative), $\boldsymbol{f}$ est strictement convexe (concave).

Convexité - Concavité

Définition

- Une matrice carrée $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{n}}$ est semi-définie positive (négative) si :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \qquad \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq (\leq) \mathbf{0}$$

- Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ de dimension $\boldsymbol{n}$ est définie positive (négative) si :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \qquad \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > (<) \mathbf{0}$$

Exemple

Soit la fonction $\boldsymbol{U}$ définie sur $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

Etudier la convexité de la fonction $\boldsymbol{U}$.

Convexité - Concavité

Solution

- On a : $$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$$ et : $$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$$
- Et aussi : $$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{x_1^2}$$ et : $$\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{x_2^2}$$ et : $$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 x_2} = 0$$
- D'où :

$$H_U\,(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad y^T H_U\,(x_1, x_2) y = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- Donc : $$y^T H_U\,(x_1, x_2) y = -\frac{y_1^2}{x_1^2} - \frac{y_2^2}{x_2^2} \quad \Longrightarrow \quad y^T H_U\,(x_1, x_2) y < 0$$
- Par conséquent, $\boldsymbol{U}$ est strictement concave.

Optimisation sans contraintes

Conditions nécessaires

- Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction admettant des dérivées partielles en $\boldsymbol{a}$, où $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur de $\boldsymbol{D}$. Si $\boldsymbol{f}$ a un optimum local en $\boldsymbol{a}$, alors $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, c'est-à-dire : $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$

Remarque

- Si $\boldsymbol{a}$ est une point intérieur de $\boldsymbol{D}$ qui vérifie $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ mais qui n'est pas un optimum local de $\boldsymbol{f}$, alors on dit que $\boldsymbol{a}$ est un point col (ou point selle) de $\boldsymbol{f}$.

Optimisation sans contraintes

Conditions suffisantes

Proposition

- Les conditions suffisantes pour que $\boldsymbol{a}$ soit un maximum (minimum) local de $\boldsymbol{f}$ sont :

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$
2) $H_f(a)$ est définie négative (positive).

Corollaire

- Les conditions suffisantes pour que $\boldsymbol{a}$ soit un maximum (minimum) local de $\boldsymbol{f}$ sont :

1) $\nabla f(a) = 0$
2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < (>) 0$ et $Det\big(H_f(a)\big) > 0.$

Optimisation sans contraintes

Conditions d'optimalité globale

Proposition

- Si $\boldsymbol{f}$, définie sur un ouvert convexe $\boldsymbol{D}$ de $\mathbb{R}^2$, est concave (convexe), une condition pour que $\boldsymbol{a} \in D$ soit un maximum (minimum) global de $\boldsymbol{f}$ est que $\nabla f(a) = 0$.

Remarque

- Un optimum global est obtenu par la condition du premier ordre, les conditions de second ordre étant automatiquement vérifiées du fait de la concavité (convexité) de $\boldsymbol{f}$.

Optimisation sous contraintes

Définition

- On dit que $\boldsymbol{f}$ admet un **maximum local** en $\boldsymbol{a}$ sous la contrainte $\boldsymbol{x \in A}$ si :

$$\exists \boldsymbol{r} > \mathbf{0}, \text{ tel que } \boldsymbol{f(x) \leq f(a)}, \quad \forall\, \boldsymbol{x \in A \cap B(a,r)}$$

- On dit que $\boldsymbol{f}$ admet un **minimum local** en $\boldsymbol{a}$ sous la contrainte $\boldsymbol{x \in A}$ si :

$$\exists \boldsymbol{r} > \mathbf{0}, \text{ tel que } \boldsymbol{f(x) \geq f(a)}, \quad \forall\, \boldsymbol{x \in A \cap B(a,r)}$$

Remarques

- Dans ce qui suit, on va étudier un programme de $\boldsymbol{max_{x \in A} f(x)}$, où $\boldsymbol{A = \{x \in U, h(x) = c\}}$.
- Pour résoudre un problème de minimum, il suffit de poser $\boldsymbol{F = -f}$ pour se ramener à un problème de maximum.

Optimisation sous contraintes

Exemple

- On considère le programme suivant : $\begin{cases} \max f(x,y) = -x^2 + xy - y^2 \\ s.c. \quad x - 2y = 3 \end{cases}$
- La contrainte donne : $x = 2y + 3$ Donc on peut éliminer x dans $f(x,y)$.
- On a : $f(x,y) = -(2y+3)^2 + (2y+3)y - y^2$

  $\Leftrightarrow \quad f(x,y) = -4y^2 - 12y - 9 + 2y^2 + 3y - y^2 = -3(y^2 + 3y + 3)$
- Posons : $g(y) = (y^2 + 3y + 3)$
- Alors maximiser f sous la contrainte $x - 2y = 3$ revient à minimiser g.
- On a : $g'(y) = 2y + 3$
- Ainsi : $g'(y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq -\dfrac{3}{2}$
- D'où le maximum de f sous contrainte est donc atteint en $(x,y) = (0; -\frac{3}{2})$.

Optimisation sous contraintes

Le lagrangien et les conditions d'optimalité

Définition

- On appelle **lagrangien** du problème $\boldsymbol{P}$ la fonction $\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})$ définie par :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

- Le nombre $\boldsymbol{\lambda}$ est appelé **multiplicateur de Lagrange** associé à la contrainte $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0$.

Proposition

- $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda})$ est un maximum (minimum) local de $\mathcal{L}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\nabla\mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) = 0$
2) Le déterminant de $H_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda})$ est positif (négatif)

❑ Optimisation sous contraintes

Le lagrangien et les conditions d'optimalité

Exemple

- Cherchons à optimiser la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par $\boldsymbol{f(x,y) = xy}$ sous la contrainte $\boldsymbol{y - 2x = 4}$.

Solution

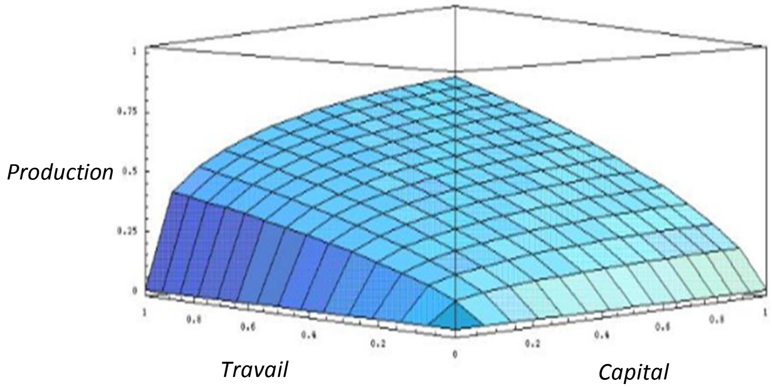
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*,\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{y - 2\lambda = 0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x^*,\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{x + \lambda = 0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(x^*,\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{y - 2x - 4 = 0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 2\lambda} \\ \boldsymbol{x = -\lambda} \\ \boldsymbol{4 - y + 2x = 0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 2\lambda} \\ \boldsymbol{x = -\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda = 1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 2} \\ \boldsymbol{x = -1} \\ \boldsymbol{\lambda = 1} \end{cases}$$

$$H_{\mathcal{L}}(-1,2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $\det H_{\mathcal{L}}(-1,2,1) = -4$. D'où, le point $\boldsymbol{f(-1,2)}$ est un minimum local sous contrainte.

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences Juridiques , Economiques et Sociales de Tanger
Filière Management des Ressources Humaines
Filière Comptabilité, Finance et Fiscalité (Groupe C)

Mathématiques



Pr. Soumaya FELLAJI
Enseignante Chercheuse à la FSJES-Tanger
Equipe de Recherche en Management et Dynamique des Organisations (EReMDO)

Année Universitaire : 2023-2024